ГЕОМЕТРИЯ

ФГОС

УМК

Т. М. Мищенко

Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии

К учебнику А. В. Погорелова «Геометрия. 7–9 классы»

- Методы решения задач
- Тематическое планирование
- Планы уроков
- Объяснение сложных тем
- Контрольные и самостоятельные работы
- Указания к задачам, решения

9

9 класс

ЭКЗАМЕН

Учебно-методический комплект

Т. М. Мищенко

Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии

К учебнику А. В. Погорелова
«Геометрия. 7–9 классы» (М. : Просвещение)

9 класс

Рекомендовано
ИСМО Российской Академии Образования

Методы решения задач
Тематическое планирование
Планы уроков
Объяснение сложных тем
Контрольные и самостоятельные работы
Указания к задачам, решения

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА • 2015

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
М71

Имя автора и название цитируемого издания указаны на титульном листе данной книги (ст. 1274 п. 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации).

Изображение учебного издания «Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. организаций / А. В. Погорелов. — М. : Просвещение» приведено на обложке данного издания исключительно в качестве иллюстративного материала (ст. 1274 п. 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации).

Мищенко Т. М.

М71 Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии: 9 класс: к учебнику А. В. Погорелова «Геометрия. 7–9 классы». ФГОС (к новому учебнику) / Т. М. Мищенко. — М. : Издательство «Экзамен», 2015. — 157, [3] с. (Серия «Учебно-методический комплект»)

ISBN 978-5-377-07863-0

Данное пособие полностью соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (второго поколения).

Предлагаемые дидактические материалы и методические рекомендации призваны помочь учителю, работающему по учебнику А. В. Погорелова «Геометрия. 7–9 классы».

Пособие написано к учебнику, переработанному в соответствии со стандартом второго поколения. Пособие полностью соответствует требованиям, предъявляемым стандартом второго поколения к уровню изложения теоретического материала. Предлагаемые задания удовлетворяют требованиям планируемых результатов обучения как обязательного уровня, так и повышенного уровня сложности.

Структура контрольных работ и форма заданий соответствуют структуре и форме заданий Основного государственного экзамена (ОГЭ).

Использование рекомендаций методического пособия в учебном процессе позволит осуществить: во-первых, достижение каждым учеником уровня обязательной геометрической подготовки, и, во-вторых, сформировать у учащихся умение применять полученные знания как в стандартных ситуациях, так и в несколько отличных от обязательного уровня.

В пособии по *каждой главе* дается общая характеристика ее содержания, места и роли в курсе, методических особенностей ее изучения; контрольная работа.

По *каждому параграфу* дается комментарий для учителя, включающий общую характеристику содержания параграфа, требования к знаниям и умениям учащихся; методические рекомендации к изучению материала для учителя; примерное планирование изучения материала параграфа; указания к решению задач из учебного пособия; дополнительные задачи.

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации учебные пособия издательства «Экзамен» допущены к использованию в общеобразовательных организациях.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

Подписано в печать 16.10.2014. Формат 60x90/16. Гарнитура «Школьная».
Бумага газетная. Уч.-изд. л. 6,77. Усл. печ. л. 10. Тираж 10 000 экз. Заказ № 4326/14.

ISBN 978-5-377-07863-0

© Мищенко Т. М., 2015
© Издательство «***ЭКЗАМЕН***», 2015

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга предназначена учителю, работающему в девятых классах по учебнику А.В. Погорелова «Геометрия, 7–9» (М., Просвещение, 2013). В книге даны рекомендации, разработанные в соответствии с концепцией построения учебника и позволяющие учителю сориентироваться в методических особенностях изложения учебного материала. Методические рекомендации написаны к учебнику, переработанному в соответствии со ФГОС[1], и полностью соответствуют требованиям, предъявляемым ФГОС к уровню усвоения учащимися теоретического материала. Предлагаемые задания удовлетворяют требованиям планируемых результатов обучения как обязательного уровня, так и повышенного уровня сложности.

Использование рекомендаций методического пособия в учебном процессе позволит осуществить: во-первых, достижение каждым учеником уровня обязательной геометрической подготовки и, во-вторых, сформировать у школьников умение применять полученные знания как в стандартных ситуациях, так и в несколько отличных от обязательного уровня.

Основными особенностями авторского подхода к изложению учебного материала является разумное сочетание строгости логических рассуждений с опорой на наглядность при дедуктивном построении курса. Такой подход определяет и главный метод работы учителя с классом: *обучение по образцам*, а именно, практически *каждая теорема курса должна быть доказана учителем у доски*, независимо от того, будет или нет воспроизведение этого доказательства позднее требоваться от учащихся.

При обучении в девятом классе важно требовать от учащихся четких формулировок и грамотных ссылок как при изложении теоретического учебного материала, так и при решении задач, выполнении учебных заданий. При этом целесообразно, чтобы при вхождении в тему образец ответа давал сам учитель. Требования же при оценке ответов учащихся и их письменных работ должны быть дифференцированными.

Отсюда следует, что большую часть урочного времени необходимо использовать для решения задач. В учебнике задачам отводится чрезвычайно важная роль. Некоторые из них содержат интересные геометрические факты и служат дополнением к теоретическому материалу учебного пособия. Все задачи учебника соответствуют требованиям планируемых результатов обучения, как их определяет Стандарт: либо как задачи обяза-

---

[1] ФГОС – Федеральный государственный образовательный стандарт.

тельного уровня, либо как задачи повышенного уровня сложности.

Определенную сложность для учителя представляет необходимость взвешенного сочетания при решении задач письменных и устных форм работы. Письменные формы работы являются важнейшим видом деятельности, формирующим устойчивые навыки в проведении логических рассуждений при решении задач. Форма записи условия задачи, разумные, естественные и исторически сложившиеся сокращения и обозначения при вычислениях и доказательствах дисциплинируют мышление. Вместе с тем заметим, что увлечение письменными видами работы на уроках и дома приводит к большим и не всегда оправданным затратам времени и тормозит развитие устной геометрической речи.

Основное назначение данной книги – помочь учителю в организации учебной деятельности школьников. В ней даются:

по каждой главе – общая характеристика ее содержания, места и роли в курсе, контрольная работа;

по каждому параграфу – комментарий для учителя, включающий общую характеристику содержания и требования к знаниям и умениям учащихся; методические рекомендации к изучению материала с разбивкой по отдельным вопросам; примерное планирование изучения материала параграфа; указания к решению задач из учебного пособия; дополнительные задачи.

Рубрика **«Методические рекомендации к изучению материала для учителя»**. ***Весь материал данного раздела полностью адресован учителю и только учителю.*** Здесь учитель получает некоторые рекомендации к изучению материала, расставлены акценты и указаны приоритеты. Все методические рекомендации должны быть адаптированы к конкретному классу, уровню подготовки учащихся. Такая адаптация может привести к уменьшению числа решаемых задач, увеличению числа часов, отводимых на изучение той или иной темы за счет часов, отводимых на решение задач, или резерва.

В рекомендациях к изложению теоретического материала рассматриваются возможные методические подходы к изложению материала на уроке, рекомендуются упражнения для усвоения и закрепления материала. Для некоторых наиболее сложных теорем даются примерные планы проведения их доказательств. Новый материал будет лучше усваиваться учащимися, если они под руководством учителя сделают краткие записи в тетрадях. В большинстве случаев достаточно записать план доказательства или базовые моменты доказательства. Целесообразно сопроводить и доказательства теорем, и определения, и решения задач чертежами. Важно, чтобы учащиеся научились «видеть» условие задачи. Главное – увидеть, увидел – понял, записал условие, затем решил и доказал. Важную роль играет умение делать чертеж. Чертеж становится элементом решения и составной частью решения, среди изучаемых методов есть и специальные методы построения чертежа. Такая работа будет способствовать развитию пространственного воображения.

Издательство «Экзамен» издает также рабочие тетради к учебнику А.В. Погорелова «Геометрия. 7–9», где даются рекомендации по их использованию и определяется место их наиболее эффективного применения в каждой теме.

В методических указаниях есть ссылки на сборник тестов Т.М. Мищенко «Геометрия. Тесты. 7 класс» к учебнику А.В. Погорелова издательства «Просвещение», которые можно использовать для проведения текущего контроля. При этом в методических рекомендациях даются рекомендации их использования.

Привлечение наглядных представлений не только не противоречит основному принципу построения курса, но является его методической особенностью. К каждой теме курса в учебнике даны фотографии, иллюстрирующие не только прообразы геометрических фигур, но и позволяющие увидеть связь между геометрией и окружающим миром.

Рубрика **«Примерное планирование изучения материала»**. Задачи к каждому уроку выделены по принципу их соответствия содержанию изучаемого на данном уроке теоретического материала. Поэтому кроме задач, указанных в разделе «Методические рекомендации к изучению материала для учителя», включены задачи, которые лучше решить с классом не в процессе объяснения нового материала, а в процессе его закрепления. Одна из задач этапа первичного закрепления в процессе изучения темы состоит в том, чтобы научить школьников решать новые задачи, применяя только что полученные сведения, новые алгоритмы и методы решения задач. Как правило, именно эти задачи дублируются задачами домашнего задания.

Приведенное в методических рекомендациях к изучению материала примерное планирование отводит минимальное число уроков, необходимых для изучения той или иной темы. Однако в каждом параграфе резервируется несколько уроков для корректировки предложенного планирования, что позволит учителю более свободно распределять учебное время в зависимости от особенностей класса и уровня подготовки учащихся. При распределении учебного времени на изучение каждого параграфа последние несколько уроков отводится: на решение задач, один урок на систематизацию и обобщение знаний, один урок на контрольную работу и заключительный урок для разбора ошибок контрольной работы и подведения итогов. На уроках решения задач и систематизации и обобщение знаний рекомендуется решить те задачи, которые не были решены в процессе изучения темы, и провести подготовку к контрольной работе.

В рубрике **«Указания к задачам»** приведены схемы решения основных (опорных задач) и решения наиболее трудных задач.

«Дополнительные задачи» образуют некоторый резерв. Одни из них должны помочь при закреплении нового материала, другие – подвести учащихся к решению задач из учебника, третьи могут быть использованы для индивидуальных заданий.

Целью **самостоятельных и контрольных работ** является проверка усвоения учащимися основного материала изученной темы (иногда части темы). При этом результаты проверки самостоятельных и контрольных работ позволяют зафиксировать не только достижение или недостижение учащимися уровня обязательной подготовки, но также достижение повышенного уровня обученности. В работах проверяются следующие умения: понимать условие задачи, владеть соответствующей терминологией и символикой; делать чертежи, сопровождающие условие задачи, выделять на чертеже необходимую при решении задачи конфигурацию.

Кроме того, для контроля достижения учащимся уровня обязательной подготовки рекомендуется использовать сборник тестов Т.М. Мищенко «Геометрия. Тесты. 7 класс» к учебнику А.В. Погорелова издательства «Просвещение».

§ 11. ПОДОБИЕ ФИГУР

Содержание параграфа составляет материал, являющийся традиционным для любого курса планиметрии: преобразование подобия, подобие фигур, признаки подобия треугольников. Здесь же рассматривается вопрос об углах, связанных с окружностью, и их свойствах. Доказательство теоремы о вписанном угле опирается на понятие центрального угла. Поэтому предварительно вводится понятие центрального угла и устанавливается соответствие между дугами окружности и центральными углами. В свою очередь введение понятия «центральный угол» опирается на понятие «плоский угол». Новым в развитии понятия «угол» является введение градусной меры угла α в пределах $0 < \alpha < 360°$.

Усвоение учащимися признаков подобия треугольников и формирование умения их применения являются одной из основных задач этого параграфа. И это не случайно: свойства подобных треугольников будут многократно применяться в дальнейших темах курса, как планиметрии, так и стереометрии.

Теория подобия, в частности гомотетия, в соответствии с программой дается в ознакомительном порядке, т. е. не предполагается требовать от учащихся воспроизведения доказательств теорем, поэтому формой организации уроков по первым трем пунктам может быть либо лекция, либо беседа. Очень важно в процессе изучения преобразования подобия и гомотетии подчеркнуть, что эти преобразования плоскости не являются движением, так как при них не сохраняются расстояния между точками. Однако определения подобия и гомотетии, а также их свойства будут использоваться при доказательстве признаков подобия треугольников, поэтому учащиеся должны их усвоить на уровне практических применений.

Доказательства всех трех признаков подобия треугольников объединены общностью идеи доказательства и проводятся по одному плану:

1. Треугольник $A_1B_1C_1$ подвергается преобразованию подобия, например гомотетии с коэффициентом подобия $k = \dfrac{AB}{A_1B_1}$. При этом получается некий третий треугольник $A_2B_2C_2$.

2. Доказывается равенство треугольников ABC и $A_2B_2C_2$.

3. Доказывается, что треугольник $A_1B_1C_1$ переводится в треугольник ABC преобразованием подобия, т. е. что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ по определению.

Планируемые итоговые результаты изучения одиннадцатой главы:

Учащиеся должны научиться:

– *изображать, обозначать* и *распознавать* на чертежах и рисунках углы, связанные с окружностью, центральный угол в окружности;

– *выделять* в конфигурации, данной в условии задачи, подобные треугольники;

– *иллюстрировать* и *объяснять* формулировки признаков подобия треугольников;

– *объяснять* понятие подобия;

– *формулировать, иллюстрировать* и *доказывать* теоремы об углах, связанных с окружностью;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

• признаки подобия треугольников;

• теоремы об углах, связанных с окружностью;

• алгебраический аппарат;

– применять при решении задач на построение;

• понятие подобия.

Выпускник получит возможность:

• *овладеть методом подобия решения задач на вычисления и доказательства;*

• *научиться решать задачи на построение методом геометрического места точек и методом подобия.*

Преобразование подобия. Свойства преобразования подобия. Подобие фигур

Комментарий для учителя

В пунктах 100–102 изучаются преобразование *подобия* и его свойства. Одним из важнейших примеров преобразования *подобия* является *гомотетия*, которая будет применяться при изложении признаков подобия треугольников. Вводимые в данных пунктах определения: преобразования подобия, гомотетии, подобия фигур, а также их свойства в дальнейшем в качестве аппарата для решения задач не применяются.

Текущие результаты изучения пунктов 100–102. Учащиеся должны научиться:

– *выделять* в конфигурации, данной в условии задачи, подобные треугольники;

– *иллюстрировать и объяснять* формулировку теоремы **11.1**;

– *объяснять* понятия: *гомотетии, подобия, коэффициентов гомотетии* и *подобия, подобных фигур*;

– *объяснять* различие между *преобразованиями движения* и *подобия*;

– *строить* точки и простейшие фигуры, гомотетичные данным;

– *применять* при решении простейших задач на вычисления и доказательство:

- понятия: *гомотетии, подобия, подобных фигур*;
- свойства преобразования подобия.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. При введении определения *подобия* следует обратить внимание на его важнейшее свойство: при преобразовании подобия *расстояние между точками изменяется в одно то же число раз.* То есть, если в условии сказано, что задано преобразование *подобия*, то учащиеся должны понимать, что в этом случае точки X и Y фигуры F переходят в точки X' и Y' фигуры F' (рис. 1), и записать в ходе решения задачи или в краткой записи условия $X'Y' = kXY$. После этого полезно обсудить с учащимися вопрос:

Рис. 1

> Какое преобразование плоскости будет задано, если $k = 1$?

При обсуждении этого вопроса важно подчеркнуть: движение сохраняет расстояние между точками, а преобразование *подобия* его изменяет для каждой пары точек в k раз.

2°. Понятие *гомотетии* в учебнике вводится конструктивно, тем самым задается правило построения точек, гомотетичных данным. При объяснении правила построения полезно вместо рисунка 236 из учебника дать рисунок 2, который выполняется по ходу объяснения.

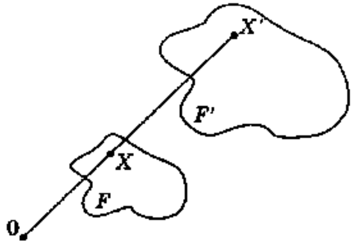


Рис. 2

При введении определения *гомотетии относительно центра О* основное внимание необходимо направить не на запоминание учащимися формулировки определения, а на его понимание. Другими словами, если в условии сказано: «... *гомотетия относительно центра О*...», то учащиеся должны записать в ходе решения задачи или в краткой записи условия: $OX' = kOX$ и при этом точки X и X' лежат на одном луче.

На формирование умения *применять* понятие *гомотетии относительно центра О* можно предложить учащимся несколько простых заданий:

1. На плоскости даны точки O, A и B. Отметьте точки A' и B', в которые перейдут точки A и B при гомотетии относительно центра O, если коэффициент гомотетии равен 2.

2. На плоскости даны точки O, C и D. Отметьте точки C' и D', в которые перейдут точки C и D при гомотетии относительно центра O, если коэффициент гомотетии равен $\frac{1}{3}$.

Затем полезно решить задачи 1 и 2 из учебника.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся выполнить упражнения 1 и 2.

2°. Определенные трудности у учащихся может вызвать построение рисунка и краткая запись условия и заключения теоремы 11.1. Поэтому изучение теоремы 11.1 начинается с формулировки теоремы и выполнения рисунка 3 по условию теоремы. Проанализируем условие теоремы: «*Гомотетия есть преобразование подобия*». Пусть X и Y – две произвольные точки фигуры F. Данное преобразование *гомотетия относительно центра О* переводит точку X фигуры F в точку X' фигуры F', а точку Y фигуры F в точку Y' фигуры F'. Так как в условии дана *гомотетия относительно центра О*, значит: $OX' = kOX$ и $OY' = kOY$.

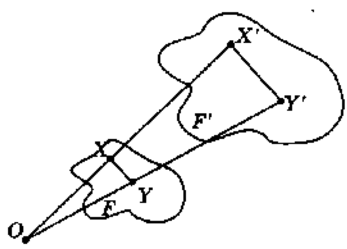


Рис. 3

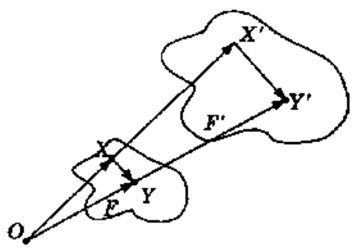


Рис. 4

Выполним краткую запись:

Дано: O – центр гомотетии;

$X \in F$, $Y \in F$;

$X' \in F'$, $Y' \in F'$;

$X \to X'$, $Y \to Y'$;

$OX' = kOX$, $OY' = kOY$.

Доказать: $X'Y' = kXY$.

Доказательство теоремы 11.1 можно построить по следующей схеме.

1. Ввести систему координат, приняв за начало координат точку O – центр гомотетии.

2. Точки X и X' лежат на одном луче, а точки Y и Y' на другом луче по определению гомотетии. Значит, $\overline{OX'} = k\overline{OX}$; $\overline{OY'} = k\overline{OY}$ (рис. 4).

3. Провести выкладки согласно учебнику.

3'. Доказательство утверждений *«Преобразование подобия переводит прямые в прямые, полупрямые переходят в полупрямые, отрезки переходят в отрезки»* аналогично доказательству утверждений *«При движении прямые переходят в прямые, полупрямые переходят в полупрямые, отрезки переходят в отрезки»*. Если учитель сочтет необходимым провести это доказательство, то это можно сделать по следующей схеме.

I. Сначала доказывается, что прямые переходят в прямые и сохраняется порядок точек.

1. Предположим, что три точки, которые лежали на одной прямой, после преобразования подобия не лежат на одной прямой. Тогда выполняется неравенство треугольника, и это вступает в противоречие с определением преобразования подобия ($X'Y' = kXY$). Вывод: точки лежат на одной прямой.

2. Предположим, что после преобразования подобия изменился порядок точек, что приводит к противоречию с аксиомой измерения отрезков (аксиома III).

II. Для доказательства второго следствия *«Преобразование подобия полупрямые переходят в полупрямые»* очень важно, что точки переходят в определенном порядке. Необходимо зафиксировать начало полупрямой.

III. Справедливость третьего следствия *«Преобразование подобия отрезки переводит в отрезки»* (если некоторая точка X принадлежит отрезку AB, то при преобразовании подобия A и B перейдут в точки A_1 и B_1, а точка X в точку X_1, принадлежащую отрезку с концами в точках A_1 и B_1) следует из сохранения порядка точек на прямой при преобразовании подобия.

IV. В ходе доказательства утверждения *«Преобразование подобия сохраняет углы между полупрямыми»* – полезно выписать соотношения между сторонами треугольников ABC, $A_1B_1C_1$ и AB_2C_2 (рис. 5). Треугольник ABC переводится в треугольник $A_1B_1C_1$ *преобразованием подобия* с коэффициентом k.

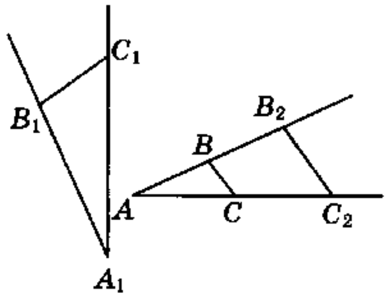


Рис. 5

Отсюда по определению подобия следует $A_1B_1 = kAB$, $B_1C_1 = kBC$, $A_1C_1 = kAC$.

Преобразование гомотетии относительно центра B с коэффициентом k переводит точку A в точку A_2, точку B в точку B_2, точку C в точку C_2. В силу теоремы 11.1 $A_2B_2 = kAB$, $B_2C_2 = kBC$, $A_2C_2 = kAC$.

Из равенства треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ по третьему признаку следует равенство углов ABC и $A_1B_1C_1$.

В рабочей тетради следует предложить учащимся записать свойства ***преобразования подобия.***

4°. Изложение свойства подобия: *«Если фигура F подобна фигуре F_1, а фигура F_1 подобна фигуре F_2, то фигура F подобна фигуре F_2»* – начинается с разъяснения формулировки теоремы. Сначала следует объяснить учащимся, что первое преобразование *подобия* переводит точки фигуры F в точки фигуры F_1 с коэффициентом подобия k_1, а второе преобразование *подобия* переводит точки фигуры F_1 в точки фигуры F_2 с коэффициентом подобия k_2. Два этих преобразования *подобия* можно заменить одним *преобразованием,* непосредственно переводящим точки фигуры F в точки фигуры F_2 с коэффициентом подобия k_1k_2.

Общее определение *подобных фигур* полезно конкретизировать *для подобных треугольников*: *«Треугольники называются подобными, если они переводятся друг в друга преобразованием подобия»*. При этом так же, как и в случае равенства треугольников, в записи *подобия треугольников* предполагается, что вершины, переходящие друг в друга при данном преобразовании *подобия*, стоят на соответствующих местах: если $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, то вершина A переходит в вершину A_1, вершина B переходит в вершину B_1, а вершина C переходит в вершину C_1.

Из свойств преобразования подобия следует, что у подобных фигур и, в частности, у треугольников соответствующие углы равные, а соответствующие стороны пропорциональные. Условие, накладываемое на порядок записи вершин *подобных треугольников*, позволяет (как и в случае равных треугольников) непосредственно из записи $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ указать, какие именно углы равны: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ и какие стороны пропорциональны: $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$.

Это полезно также и для контроля правильности записи пропорциональности соответственных сторон с целью предупреждения ошибок учащихся.

Для того чтобы проверить правильность усвоения определения *подобных треугольников,* можно предложить упражнение:

1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Определите, чему равны $\angle A_1$, $\angle B_1$, $\angle C_1$ если $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 85^\circ$, $\angle C = 65^\circ$.

2. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Определите, чему равны стороны B_1C_1, и A_1C_1, если $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 6$ см и $A_1B_1 = 12$ см.

В рабочей тетради следует предложить учащимся выполнить упражнения 3–5.

5°. Домашнее задание после второго урока формируется из вопросов, связанных с признаками равенства треугольников, так как признаки подобия треугольников аналогичны им, а в решении задач, рекомендованных в этом задании, применяются дополнительные построения. Аналогичные дополнительные построения будут использоваться и при доказательстве признаков подобия треугольников.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пунктов 100–102; решить задачи 1, 2 и 4 из учебника; дома – вопросы 1–6 из § 11, задачи 3 и 6 из учебника.

На втором уроке в классе провести подробное обсуждение домашнего задания; решить задачи 5, 7–9 из учебника; дома – повторить вопросы 1, 2 и 12 из § 3, задачи 39 и 40 из § 3.

Указания к решению задач

Задачу 1 целесообразно решить в классе. Проанализируем по рисунку 6 возможность построения центра гомотетии. Через точки X и X' и точки Y и Y' проведем прямые XX' и YY'. Если прямые XY и $X'Y'$ параллельны, то прямые XX' и YY' пересекаются в точке O (рис. 6).

Предположим, что прямые XY и X'Y' не параллельны, тогда они пересекаются в некоторой точке A. При гомотетии с центром в точке O: точка A перейдет в некоторую точку A', принадлежащую прямой X'Y', как точка, лежащая на прямой XY. Причем OA' = kOA и лежит

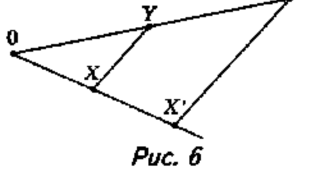


Рис. 6

на луче OA. Но по предположению точка A уже лежит на прямой $X'Y'$ и луче OA, получили противоречие: луч OA имеет две точки пересечения с прямой $X'Y'$. Необходимо также проанализировать порядок взаимного расположения точек на лучах: либо точка X между точками O и X' и точка Y между точками O и Y', либо точка X' между точками X и O и точка Y' между точками Y и O. В первом случае коэффициент гомотетии больше 1, во втором–меньше 1.

2. По определению гомотетии $OX' = 2OX$, $OX = XX'$.

5. В задаче **3** был построен треугольник, гомотетичный данному. А поскольку гомотетия есть преобразование подобия, то фигурой, подобной треугольнику, будет треугольник.

7. Возьмем за центр гомотетии центр данной окружности радиуса R точку O и подвергнем окружность преобразованию гомотетии с коэффициентом k. Все точки построенной фигуры будут находиться от точки O на расстоянии, равном kR. Следовательно, построенная фигура – окружность.

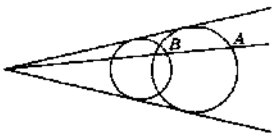


Рис. 7

А поскольку гомотетия есть преобразование подобия, то фигурой, подобной окружности, будет окружность.

8. Построим некоторую окружность, касающуюся сторон угла (рис. 7). Проведем прямую через вершину угла и данную точку A. Эта прямая пересечет построенную окружность в некоторой точке B. Гомотетия относительно вершины угла, переводящая точку B в точку A, переведет построенную окружность в искомую.

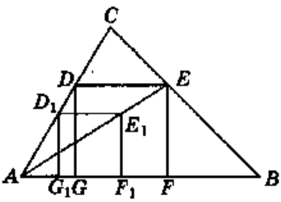


Рис. 8

9. Построим сначала квадрат $D_1E_1F_1G_1$, такой, что вершины F_1 и G_1 лежат на стороне AB, а вершина D_1 – на стороне AC. Гомотетия относительно вершины A переводит точку E_1 в точку E, лежащую на стороне BC, а точки D_1, F_1 и G_1 в точки D, F и G соответственно (рис. 8). Отсюда $EF \perp AB$ (преобразование подобия сохраняет углы), а длина отрезка EF – сторона искомого квадрата. Четырехугольник $DEFG$ – квадрат, так как гомотетия переводит фигуру в подобную фигуру.

Дополнительные задачи

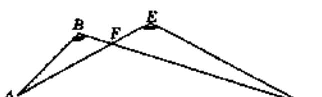


Рис. 9

1. Треугольники ABC и DEF подобны. Известно, что $AC = 15$ см. Найдите сторону DF, если коэффициент подобия треугольников равен 3.

2. Треугольники ABF и DEF подобны. Запишите отношение соответствующих сторон (рис. 9).

Признак подобия треугольников по двум углам

Комментарий для учителя

Доказательства *первого, второго и третьего признаков подобия треугольников*, а также их применение к решению задач практически аналогичны. Опыт показывает, что привлечение учащихся при изучении *второго и третьего признаков подобия треугольников*, используя эту аналогию, приводит к лучшему усвоению всех признаков *подобия* треугольников учащимися. Кроме того, после изучения доказательства *второго и третьего признаков подобия треугольников* учащиеся лучше понимают метод доказательства, который использовался при изучении и *первого признака подобия треугольников*. В связи с этим представляется целесообразным провести промежуточный контроль за умением применять *первый признак подобия треугольников*.

Заметим, что в методических рекомендациях изложение доказательств этих теорем приводится более подробно по сравнению с учебником. Это сделано для того, чтобы привлечь внимание учащихся к полному доказательству. Однако при ответах учащихся не следует в обязательном порядке требовать более детальных обоснований по сравнению с учебником.

Текущие результаты изучения пункта 103. Учащиеся должны научиться:

- *изображать, обозначать и распознавать* на чертежах и рисунках треугольники, подобные по двум углам, используя обозначения соответственных элементов или известные свойства треугольников;
- *выделять* в конфигурации, данной в условии задачи, подобные треугольники;
- *формулировать и объяснять формулировку* признака подобия треугольников по двум углам;
- *доказывать* (требование только для сильных учащихся) признак подобия треугольников по двум углам;
- *решать* задачи с использованием:
  - признака подобия треугольников по двум углам;
  - алгебраического аппарата.

Методические рекомендации к изучению материала

1*. Так как доказательство *первого признака подобия треугольников* (теорема 11.2) достаточно сложное и является образцом для доказательства второго и третьего признаков подобия треугольников, то его лучше провести полностью самому учителю. Включение же учащихся во фронтальную работу при первичном разборе теоремы может привести к значительным потерям времени и к тому, что от учащихся ускользнет основная идея доказательства, логическая последовательность рассуждений.

Изучение теоремы 11.2 начинается с формулировки теоремы и выполнения рисунка 10 по условию теоремы. При этом полезно отметить в треугольниках, соответственно, равные углы. А затем выполнить краткую запись условия и заключения теоремы.

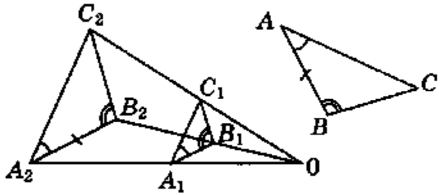


Рис. 10

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$;
$\angle A = \angle A_1$;
$\angle B = \angle B_1$.

Доказать: $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$.

Доказательство проводится по следующему плану.

1. Треугольник $A_1B_1C_1$ подвергается преобразованию подобия, например гомотетии с коэффициентом подобия $k = \dfrac{AB}{A_1B_1}$. При этом получается третий треугольник $A_2B_2C_2$, подобный треугольнику $A_1B_1C_1$.

2. Доказывается равенство треугольников ABC и $A_2B_2C_2$ по второму признаку равенства треугольников.

3. Утверждается: так как $\Delta ABC = \Delta A_2B_2C_2$, то ΔABC и $\Delta A_2B_2C_2$ подобны с коэффициентом подобия 1.

4. Делается вывод: так как $\Delta ABC \backsim \Delta A_2B_2C_2$, а $\Delta A_2B_2C_2 \backsim \Delta A_1B_1C_1$, то $\Delta ABC \backsim \Delta A_1B_1C_1$ по свойству транзитивности преобразования подобия.

2°. После доказательства *первого признака подобия треугольников* полезно разобрать с учащимися по тексту учебника решение задачи 15 – это известная лемма о подобии треугольников, а затем выполнить задания по готовому чертежу, используя упражнения 1 и 2 из дополнительных задач. Затем решить задачу 21 из учебника. Ее решение полезно записать полностью в тетрадях учащихся.

В трапеции $ABCD$ проведены диагонали AC и BD. Докажите, что треугольники COB и AOD подобны (рис. 11).

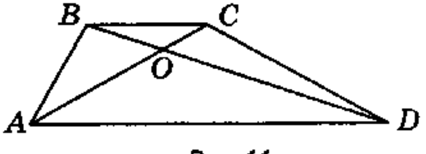


Рис. 11

Дано: $ABCD$ – *трапеция*;
AC *и* BD – *диагонали*.

Доказать: $\Delta COB \backsim \Delta AOD$.

Доказательство.

Рассмотрим ΔAOD и ΔBOC:
$\angle AOD = \angle BOC$ – вертикальные;
$\angle BCA = \angle CAD$ – внутренние накрест лежащие при пересечении параллельных прямых BC и AD прямой AC.

Следовательно, $\Delta COB \backsim AOD$ по двум углам.

Следует при этом обратить внимание учащихся на то, что правильная, геометрически грамотная ссылка на *первый признак подобия треугольников* должна быть именно в такой форме: *«по двум углам»*. Однако, вообще говоря, возможны и другие формы ссылки, например полная формулировка или указание номера признака.

Учителю при решении задач необходимо уделить внимание работе с рисунками, обратить внимание учащихся, что равными в признаках подобия треугольников могут быть только углы. На задачах, которые решаются письменно, полезно показать учащимся примеры оформления письменного решения и поощрять рациональные, лаконичные записи решения задач.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку первого **признака подобия треугольников**. *В тетради приведено решение задачи 21 из учебника (задача 8), которое рекомендуется учащимся разобрать самостоятельно. После этого предложить решить задачу 9, которая аналогична задаче 1 из дополнительных задач методического пособия. Использование в данной теме рабочей тетради позволяет сэкономить время учителя при подготовке к уроку, а также время и на самом уроке и выполнить большее число заданий с записью в тетради. А у школьников будет хороший конспект урока, который, несомненно, поможет при выполнении домашнего задания.*

3°. На втором уроке полезно рассмотреть подобие равнобедренных треугольников (задача 10 из учебника). После решения этой задачи можно предложить учащимся задачи 3–5 из дополнительных задач. Решение задачи 14 полезно отложить до изучения темы «Подобие прямоугольных треугольников».

При использовании в процессе обучения рабочей тетради полезно перед решением задачи 10 из учебника предложить учащимся решить задачу 10. В этом случае решение задачи 10 из учебника будет обобщением решения задачи 10 из тетради. После решения задачи 10 из учебника можно предложить задачи 11–13 из тетради, которые аналогичны задачам 2–4 из дополнительных задач методического пособия.

Примерное планирование изучения материала

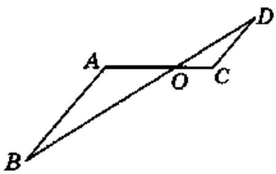
На первом уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пункта 103; решить задачи 12, 15 и 21 из учебника; дома – вопрос 7 из § 11, задачи 13, 22 – 24 из учебника.

На втором уроке в классе провести самостоятельную работу; решить задачи 10, 16, 18 и 20 (2) из учебника; дома – задачи 11, 17 и 20 (1) из учебника.

Самостоятельная работа по теме «Признак подобия треугольников по двум углам»

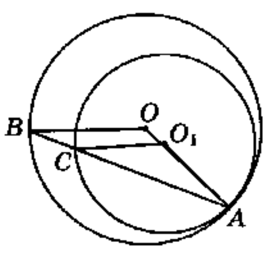
Самостоятельная работа содержит три задачи: первые две – с выбором ответа, третья – с краткой записью решения, с выполнением чертежа, но без записи условия задачи.

1-й вариант



1. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O так, что прямые AB и CD параллельны. Известно, что $AB = 18$ см, $CD = 6$ см и $CO = 3$ см. Найдите длину отрезка AC.

Ответ: 1. 12 см; 2. 24 см; 3. 4 см; 4. 21 см.



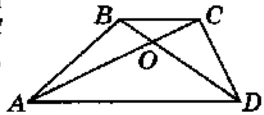
2. Две окружности с радиусами 12 см и 9 см касаются внутренним образом в точке A, через которую проходит их общая секущая BA. Найдите длину отрезка AC, если AB равен 16 см.

Ответ: 1. 12 см; 2. 9 см; 3. 27 см; 4. 18 см.

3. Биссектриса угла при основании равнобедренного треугольника делит данный треугольник на два треугольника, один из которых подобен данному. Найдите углы исходного треугольника.

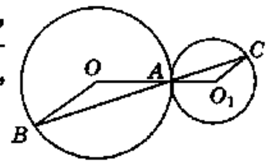
2-й вариант

1. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, которая делит диагональ AC на отрезки $OC = 6$ см и $OA = 12$ см. Найдите диагональ BD, если $OB = 6$ см.



Ответ: 1. 6 см; 2. 18 см; 3. 12 см; 4. 24 см.

2. Две окружности с радиусами 9 см и 3 см касаются внешним образом в точке A, через которую проходит их общая секущая BC. Найдите длину отрезка AB, если AC равен 5 см.



Ответ: 1. 5,4 см; 2. 9 см; 3. $\frac{5}{3}$ см; 4. 15 см.

3. В произвольном треугольнике один из углов равен 40°. Биссектриса этого угла делит данный треугольник на два треугольника, один из которых подобен данному. Найдите наибольший угол исходного треугольника.

Указания к решению задач

В задаче **10** доказывается признак подобия равнобедренных треугольников. Для равнобедренных треугольников можно сформулировать аналогичный признак подобия:

«Если угол при основании одного равнобедренного треугольника равен углу при основании другого равнобедренного треугольника, то эти треугольники подобны».

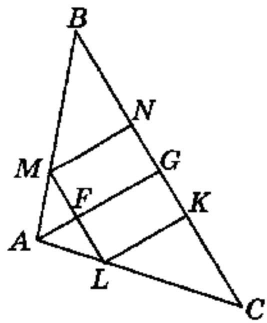


Рис. 12

Задача **15** представляет собой известную лемму о подобии треугольников. Результат, полученный в задаче, может быть использован при решении других задач. В частности, его можно было бы использовать при решении задач 16 и 28.

16. Рассмотрим треугольники ABC и AML. Они подобны, так как $ML \parallel BC$ (задача **15**) с коэффициентом подобия k. Отсюда $ML = kBC$, $AM = kAB$.

Треугольники ABG и MBN подобны, так как $MN \parallel AG$ с коэффициентом подобия $1 - k$, что следует из $BM = (1 - k)AB$. Отсюда $MN = (1 - k)AG$. $ML = MN$, как стороны квадрата. Значит, $kBC = (1 - k)AG$; $ka = (1 - k)h$; $k = \dfrac{h}{a+h}$; $ML = \dfrac{ah}{a+h}$ (рис. 12).

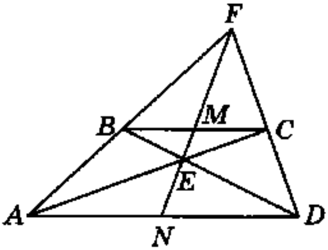


Рис. 13

28. Рассмотрим треугольники AFD и BFC (рис. 13). Они подобны, так как $BC \parallel AD$ (задача 13) с коэффициентом подобия k. Отсюда $AF = kBF$ и $AD = kBC$, $FD = kFC$. Треугольники AED и CEB подобны по двум углам, так как $\angle AED = \angle CEB$, как вертикальные, а $\angle DAE = \angle BCE$, как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AC, с тем же коэффициентом подобия k, что следует из $AD = kBC$. Отсюда $AE = kCE$. Треугольники AEN и CEM подобны по двум углам: $\angle NAE = \angle MCE$ и $\angle AEN = \angle CEM$, как вертикальные с тем же коэффициентом подобия k, что следует из $AE = kCE$. Отсюда $AN = kCM$. Треугольники AFN и BFM подобны, так как $BM \parallel AN$ с коэффициентом подобия k, что следует из $AF = kBF$. Отсюда $AN = kBM$. Приравниваем два выражения для AN, получим: $kCM = kBM$, следовательно, $CM = BM$. Треугольники DFN и CFM подобны, так как $CM \parallel DN$ с коэффициентом подобия k, что следует из $FD = kFC$. Отсюда $DN = kCM$. Из выражений $AN = kCM$ и $DN = kCM$ получим: $AN = DN$.

Дополнительные задачи

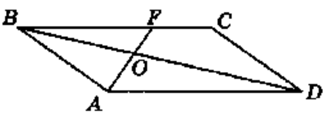


Рис. 14

1. В параллелограмме $ABCD$ проведены диагональ BD и отрезок AF. Известно, что $BO = 6$ см, $OD = 18$ см. Укажите подобные треугольники и определите коэффициент их подобия (рис. 14).

2. Определите, подобны ли остроугольные равнобедренные треугольники, если они имеют по равному острому углу.

3. Определите, подобны ли тупоугольные равнобедренные треугольники, если у них тупые углы равны.

4. Определите, подобны ли равнобедренные треугольники, если угол при вершине одного из них равен 54°, а угол при основании другого – 63°.

Признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними

Комментарий для учителя

Доказательство *второго признака подобия треугольников*, а также его применение к решению задач, как было сказано выше, аналогично первому.

Текущие результаты изучения пункта 104. Учащиеся должны научиться:

– *изображать, обозначать и распознавать* на чертежах и рисунках треугольники, подобные по двум сторонам и углу между ними, используя обозначения соответственных элементов или известные свойства треугольников;

– *выделять* в конфигурации, данной в условии задачи, треугольники, подобные по двум сторонам и углу между ними;

– *формулировать и объяснять формулировку* признака подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними;

– *доказывать* (требование только для сильных учащихся) признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними;

– *решать* задачи с использованием:

- признака подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними;
- алгебраический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Доказательство *второго признака подобия треугольников* (теорема 11.3) аналогично доказательству *первого признака подобия треугольников*, образец доказательства которого был дан учителем. При проверке домашней работы на предыдущем уроке его доказательство повторялось, поэтому представляется полезным при разборе теоремы самое активное включение учащихся.

Поскольку доказательство теоремы 11.3 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 11.2, то в рекомендациях к ее изучению ограничимся выполнением чертежа (рис. 15) и краткой записью условия и заключения теоремы.

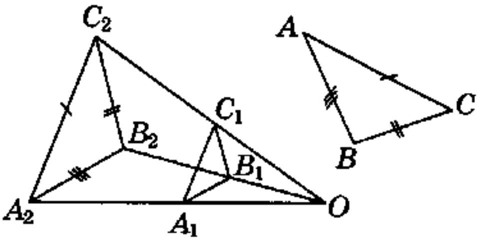


Рис. 15

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$;
$\angle C = \angle C_1$;
$AC = kA_1C_1$, $BC = kB_1C_1$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

После доказательства теоремы следует обратить внимание учащихся на то, что ссылка на *второй признак подобия треугольников* должна звучать «*по двум сторонам и углу между ними*».

Однако возможны и другие формы ссылки, например полная формулировка или указание номера признака.

2°. На прямое применение *второго признака подобия треугольников* можно решить задачу 1 из дополнительных задач. После ее решения полезно разобрать с учащимися по тексту учебника решение задачи 31, ее решение поможет при решении задач 32 и 33. Для того чтобы учащиеся лучше усвоили метод решения задачи 31, можно решить задачу 2 из дополнительных задач.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку ***второго признака подобия треугольников.***

На прямое применение теоремы 11.3 можно решить задачу 14 , а после решения задачи 31 можно решить задачу 15. Задачи 14 и 15 из тетради и задачи 1 и 2 из дополнительных задач методических рекомендаций являются одними и теми же задачами.

Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пункта 104; решить задачи 31–33 из учебника; дома – вопрос 8 из § 11, задачи 25, 26 и 30 из учебника.

Указания к решению задач

32. Обозначим $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ и $\angle C = \gamma$. Из подобия треугольников ABC и DBF (задача 31) следует: $\angle BDF = \alpha$, $\angle FBD = \beta$ и $\angle DFB = \gamma$. Из подобия треугольников ABC и DCE (рис.16) следует:

$\angle EDC = \alpha$, $\angle DEC = \beta$ и $\angle DCE = \gamma$. Следовательно, $\angle EDF = 180° - 2\alpha$. Аналогично находим $\angle DEF = 180° - 2\beta$ и $\angle EFD = 180° - 2\gamma$.

33. По условию $AD \perp BC$, следовательно, $\angle ADB = \angle ADC = 90°$, а $\angle BDF = \angle EDC = \alpha$. Отсюда следует, что $\angle ADF = \angle ADE$, а, значит, AD – биссектриса $\angle FDE$. Аналогично находим, что BE – биссектриса $\angle DEF$, CF – биссектриса $\angle EFD$ (рис. 16).

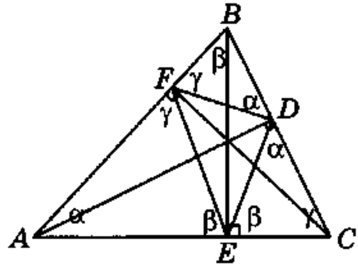


Рис. 16

Дополнительные задачи

1. В треугольниках ABC и EDF углы при вершинах B и D равны, а стороны AB и BC, заключающие $\angle B$, соответственно, больше сторон ED и DF, заключающие $\angle D$, в три раза. Определите, подобны ли эти треугольники.

2. В треугольнике из всех вершин проведены высоты. Докажите, что если два треугольника имеют общую вершину с данным треугольником, то они подобны.

Признак подобия треугольников по трем сторонам

Комментарий для учителя

Доказательство *второго признака подобия треугольников*, а также его применение к решению задач, как было сказано выше, аналогично первому.

Текущие результаты изучения пункта 105. Учащиеся должны научиться:

– *изображать, обозначать и распознавать* на чертежах и рисунках треугольники, подобные по трем сторонам, используя обозначения соответственных элементов или известные свойства треугольников;

– *выделять* в конфигурации, данной в условии задачи, треугольники, подобные по трем сторонам;

– *формулировать и объяснять формулировку* признака подобия треугольников по трем сторонам;

– *доказывать* (требование только для сильных учащихся) признак подобия треугольников по трем сторонам;

– *решать* задачи с использованием:

- признака подобия треугольников по трем сторонам;
- алгебраического аппарата;

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Так как доказательство *третьего признака подобия треугольников* (теорема 11.4) аналогично доказательствам *первого и второго признаков подобия треугольников* и идеи доказательства уже знакомы учащимся, то представляется возможным предложить его для самостоятельной работы по тексту учебника. При этом полезно сделать на доске чертеж (рис. 17) и краткую запись условия и заключения теоремы.

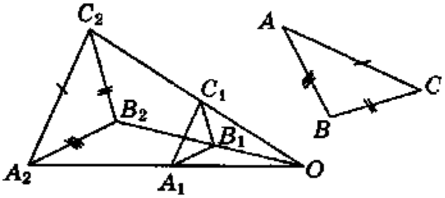


Рис. 17

Дано: ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$;
$AB = kA_1B_1$, $AC = kA_1C_1$, $BC = kB_1C_1$.

Доказать: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$.

После доказательства теоремы следует обратить внимание учащихся на то, что ссылка на *второй признак подобия треугольников* должна быть *«по трем сторонам»*. Однако возможны и другие формы ссылки, например полная формулировка или указание номера признака.

2°. На прямое применение *третьего признака подобия треугольников* можно решить задачи 34 и 35 (1). После их решения полезно разобрать с учащимися по тексту учебника решение задачи 36.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку* третьего ***признака подобия треугольников****. На прямое применение теоремы 11.4 можно решить задачу 16, а после решения задачи 34 из учебника можно решить задачу 18. Задачи 19–23 из тетради можно использовать при подготовке к контрольной работе и для организации дифференцированной работы. Задание 19 удобно использовать при повторении темы.*

Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пункта 105; решить задачи 34, 35 (1) и 36 из учебника; дома – вопрос 9 из § 11, задачи 35 (2, 3), 37 и 38 из учебника.

Подобие прямоугольных треугольников

Комментарий для учителя

Материал, представленный в пункте, является традиционным для любого курса планиметрии: признак подобия прямоугольных треугольников, выражения высоты и катета прямоугольного треугольника через гипотенузу и отрезки гипотенузы, на которые ее делит основание высоты, свойство биссектрисы угла треугольника.

В пункте рассматривается прикладной аспект применения теории подобия к доказательству теорем, которые найдут широкое применение при решении большого класса задач, как на вычисления, так и на доказательство и построение.

Текущие результаты изучения пункта **106**. Учащиеся должны научиться:

– *изображать, обозначать и распознавать* на чертежах и рисунках подобные прямоугольные треугольники, используя обозначения соответственных элементов или известные свойства треугольников;

– *формулировать и доказывать* признак подобия прямоугольных треугольников;

– *формулировать и доказывать* утверждения о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике;

– *решать* задачи с использованием:

- признака подобия прямоугольных треугольников;
- утверждений о пропорциональных отрезках в прямоугольном треугольнике;
- свойства биссектрисы угла треугольника;
- алгебраического аппарата.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Поскольку материал пункта *«Подобие прямоугольных треугольников»* доступен учащимся для самостоятельной работы, то урок по его изучению можно организовать как урок тематического обобщения темы *«Подобие треугольников»*.

Рассмотрим признаки подобия специфических треугольников (прямоугольных, равнобедренных, равносторонних), т. е. выясним вопрос: как изменяются признаки подобия треугольников, если треугольник по определению обладает определенными свойствами? Начнем с признаков подобия прямоугольных треугольников.

Доказательство *признака подобия прямоугольных треугольников* в силу его простоты пропущено в учебнике, его можно предложить учащимся сформулировать и доказать в ходе фронтальной беседы. При этом полезно заметить, что ссылка на *признак подобия прямоугольных треугольников* должна звучать «*по острому углу*». В ходе беседы следует обсудить вопросы:

> Какому признаку подобия произвольных треугольников соответствует *признак подобия прямоугольных треугольников по острому углу*?
>
> Как можно сформулировать второй признак подобия произвольных треугольников для *прямоугольных треугольников*?

Заметим, что в этом случае ссылка на *признак подобия прямоугольных треугольников* должна звучать *по двум катетам*.

> Какому еще признаку подобия произвольных треугольников соответствует *признак подобия прямоугольных треугольников по двум катетам*?

Признак подобия прямоугольных треугольников по двум катетам соответствует также *третьему признаку подобия произвольных треугольников*, так как два данных катета позволяют определить гипотенузу.

> Какому признаку подобия произвольных треугольников соответствует *признак подобия прямоугольных треугольников по катету и гипотенузе*?

Возможны два ответа:

1) *Признак подобия прямоугольных треугольников по катету и гипотенузе* соответствует *второму признаку подобия треугольников*, так как отношение катета к гипотенузе однозначно задает острый угол через значение косинуса угла между данными катетом и гипотенузой.

2) *Признак подобия прямоугольных треугольников по катету и гипотенузе* соответствует *также третьему признаку подобия треугольников*, так как данные катет и гипотенуза однозначно задают второй катет.

На закрепление *признака прямоугольных треугольников* можно предложить учащимся устно решить задачу 39.

В задаче 14 из учебника рассматривается важное свойство прямоугольного треугольника:

> *В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, делит его на два треугольника, подобные исходному и друг другу.*

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку* признака подобия прямоугольных треугольников. *На прямое применение признака можно решить задачу 24,*

аналогичную задаче 39 из учебника, и задачу 25. Затем в ходе решения задачи 26 доказать признак подобия прямоугольных треугольников по двум катетам.

2°. По аналогии с признаками подобия для прямоугольных треугольников полезно обобщить знания учащихся о подобии равносторонних и равнобедренных треугольников.

В задаче 10 (учебное пособие § 11) доказывается признак подобия равнобедренных треугольников. Для равнобедренных треугольников можно сформулировать еще два признака подобия:

«Если угол при основании одного равнобедренного треугольника равен углу при основании другого равнобедренного треугольника, то эти треугольники подобны».

«Если боковая сторона и основание одного равнобедренного треугольника пропорциональны боковой стороне и основанию другого равнобедренного треугольника, то эти треугольники подобны».

Их доказательство вынесено в самостоятельную работу, поэтому можно на первом уроке решить их устно, а на втором проверить усвоение путем выполнения самостоятельной работы.

Из решения задачи 34 (учебное пособие § 11) следует важное утверждение: *«Все равносторонние треугольники подобны».*

В рабочей тетради даны все формулировки признаков подобия равнобедренных и равносторонних треугольников.

3°. Утверждения:

«Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу»,

«Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу»

можно предложить двум хорошо успевающим ученикам решить как задачи на доске.

На закрепление сформулированных утверждений решить задачи 40 и 41 из учебника.

В рабочей тетради записать формулировки утверждений о катете и высоте прямоугольного треугольника.

4°. После доказательства *свойства биссектрисы треугольника* полезно в классе решить задачу 46, а затем под руководством учителя решить задачи 1 и 2 из дополнительных задач.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку свойства биссектрисы треугольника. Затем *решить под руководством учителя задачу 28, в учебнике это задача 46, после чего по тексту тетради разобрать решение задачи 29, в которой сформулировано утверждение, обратное свойству биссектрисы треугольника, и решить задачу 30.*

Примерное планирование изучения материала

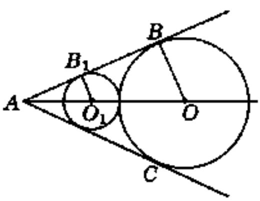
На первом уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пункта 106 до свойства биссектрисы треугольника; решить задачи 14, 39–41 из учебника; дома – вопросы 10 и 11 из § 11, задачи 43 и 44 из учебника.

На втором уроке в классе рассмотреть свойства биссектрисы треугольника; провести самостоятельную работу; решить задачу 46 из учебника; дома – вопрос 12 из § 11, задачи 45 и 47 из учебника.

Самостоятельная работа по теме «Подобие прямоугольных треугольников»

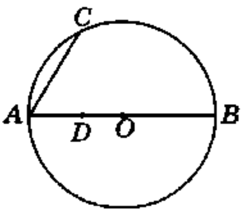
Самостоятельная работа содержит три задачи: первые две – со свободным ответом, третья – с краткой записью решения, с выполнением чертежа, но без записи условия задачи.

1-й вариант



1. Две касающиеся внешним образом окружности с центрами в точках O и O_1 касаются сторон угла A (B и B_1 – точки касания). Расстояние между точками A и O_1 в два раза меньше, чем расстояние между центрами окружностей. Найдите радиус O_1B_1, если радиус OB равен 24 см.

Ответ: ____________________



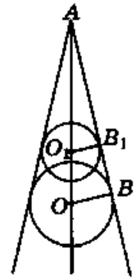
2. Отрезок AD – проекция хорды AC на диаметр окружности. Точка D делит диаметр в отношении 1 : 2. Найдите хорду AC, если диаметр окружности равен 12 см.

Ответ: ____________________

3. Докажите, что если основание и боковая сторона одного равнобедренного треугольника пропорциональны основанию и боковой стороне другого равнобедренного треугольника, то эти треугольники подобны.

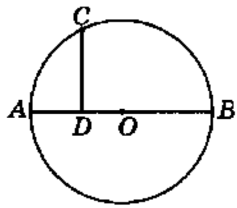
2-й вариант

1. Две пересекающиеся окружности с центрами в точках O и O_1 касаются сторон угла A (B и B_1 – точки касания). Радиус окружности с центром в точке O в два раза больше радиуса окружности с центром в точке O_1. Найдите отрезок O_1A, если отрезок OA равен 24 см.



Ответ: ______________________

2. Из точки окружности C на ее диаметр AB опущен перпендикуляр CD. Основание перпендикуляра – точка D делит диаметр в отношении 1 : 4. Найдите расстояние от точки C до диаметра, если радиус окружности равен 10 см.



Ответ: ______________________

3. Докажите, что если угол при основании одного равнобедренного треугольника равен углу при основании другого равнобедренного треугольника, то эти треугольники подобны.

Указания к решению задач

46. Проведем $BF \perp DC$ *и* $AG \perp DC$ (рис.18). Прямоугольные треугольники BCF и ACG подобны, так как $\angle ACG = \angle FCE$, как вертикальные, $\angle FCE = \angle FCB$, так как CD – биссектриса внешнего угла BCE. Значит, $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AG}{BF}$.

Прямоугольные треугольники BDF и ADG подобны, так как $BF \parallel AG$, как два перпендикуляра, проведенные к одной прямой. Значит, $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AG}{BF}$. Отсюда $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AC}{CB}$.

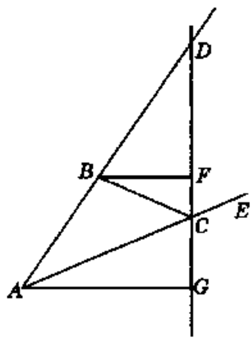


Рис. 18

Дополнительные задачи

1*. Если луч, проведенный из вершины треугольника, делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам, то этот луч является биссектрисой угла при данной вершине треугольника.

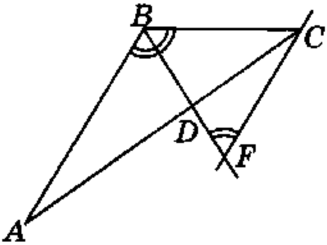


Рис. 19

Решение. Проведем через вершину C треугольника ABC прямую CF, параллельную AB (рис. 19). $\Delta ABD \sim \Delta CFD$, так как у них: $\angle ADB = \angle CDF$, как вертикальные; $\angle ABD = \angle CFD$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CF и секущей BF. Следовательно, $\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{CF}$, а по условию $\frac{AD}{AB} = \frac{CD}{CB}$. Отсюда $\frac{CD}{CF} = \frac{CD}{CB}$ и $CF = CB$. Значит, ΔBCF – равнобедренный и $\angle CBD = \angle CFD$, а значит, и $\angle CBD = \angle ABD$. Следовательно, BD – биссектриса.

2*. Прямая CD, проведенная через вершину C треугольника ABC, пересекает продолжение противолежащей стороны AB в точке D. Докажите, что если при этом выполняется отношение $\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$, то луч CD является биссектрисой внешнего угла BCE треугольника ABC.

Углы, вписанные в окружность

Комментарий для учителя

В пункте 107 учащиеся знакомятся с новым понятием, а именно, с углами, связанными с окружностью. Доказательство теоремы о *вписанном угле* опирается на понятие *центрального угла*. Поэтому предварительно вводится понятие *центрального угла* и устанавливается соответствие между *дугами окружности* и *центральными углами*. В свою очередь, введение понятия *«центральный угол»* опирается на понятие *«плоский угол»*. Новым в развитии понятия *угол* является расширение понятия угла на углы внутренние и внешние, т.е. углы, у которых градусная мера угла α изменяется пределах $0<\alpha<360^\circ$.

Текущие результаты изучения пункта 107. Учащиеся должны научиться:

– *изображать, обозначать и распознавать* на чертежах и рисунках центральный угол и дугу окружности, соответствующую данному центральному углу; вписанный угол и дугу окружности, соответствующую данному вписанному углу;

– *выделять* в конфигурации, данной в условии задачи, центральные и вписанные углы;

– *формулировать и объяснять* определения центрального угла и дуги окружности, соответствующей данному центральному углу; вписанного угла и дуги окружности, соответствующей данному вписанному углу;

– *формулировать и доказывать* теорему о вписанных углах и следствия из этой теоремы;

– *объяснять* понятия: плоского угла, дополнительного угла, градусной меры дуги окружности;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- определения *центрального и вписанного углов*;
- теорему *о вписанных углах* и следствия из нее;
- алгебраический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Понятие «*плоский угол*» вводится на наглядном уровне с опорой на рисунок 20. При введении понятия *дополнительных углов* следует обратить внимание на то, что они имеют общие стороны и при этом: один из углов является частью полуплоскости, а другой содержит полуплоскость.

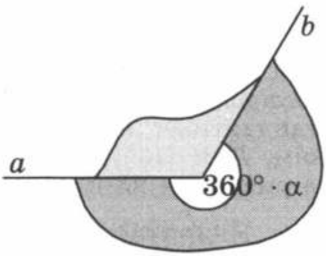


Рис. 20

После этого вводится определение градусной меры *плоского угла*. Здесь следует обратить внимание учащихся на то, что сумма градусных мер двух *плоских дополнительных углов* равна 360°.

Для закрепления введенных понятий можно предложить учащимся следующее задание устно по готовым чертежам (например, как на рисунке 21):

> Найдите градусную меру углов, дополнительных углам, изображенным на рисунках.

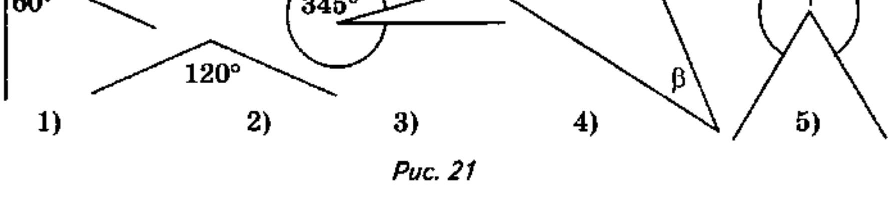


Рис. 21

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку определения ***дополнительных углов*** *и устно выполнить задания* ***31*** *и* ***32****.*

2°. *«Центральный угол»*, как и *«плоский угол»*, вводится на наглядном уровне с опорой на рисунок 22. При этом следует отметить, что центральный угол является плоским углом с вершиной в центре окружности. Отсюда следует, что всегда существуют два *центральных дополнительных угла*;

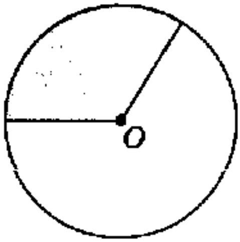


Рис. 22

при этом сумма их градусных мер равна **360°**. Часть окружности, расположенная внутри центрального угла, которая называется *дугой окружности*, соответствующей данному *центральному углу. Градусной мерой дуги окружности* называют *градусную меру* соответствующего *центрального угла*. Следовательно, сумма *градусных мер дуг*, соответствующих *центральным дополнительным* углам, тоже равна **360°**.

Для проверки правильности усвоения учащимися понятия *центральных дополнительных углов* и умения находить их в стандартных ситуациях выполнить работу по готовым чертежам. Для этого можно использовать плакаты такого типа, как на рисунках **23** и **24**:

Найдите градусную меру центральных углов, обозначенных буквами: α, β, δ, ζ, τ и φ.

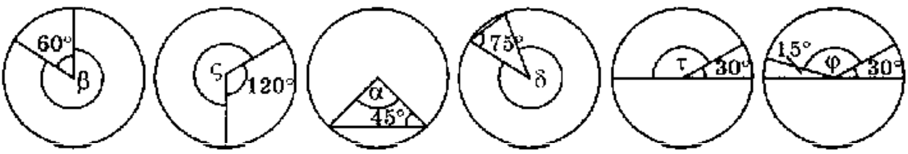


Рис. 23

Найдите градусную меру дуг окружностей, соответствующих углам, отмеченным на рисунках.

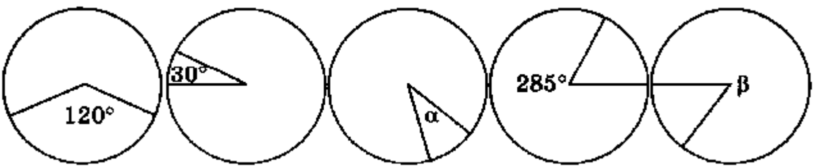


Рис. 24

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку определения центрального угла *и устно выполнить задания **33** и **34**. Затем по ходу введения понятий* дуги окружности, градусной меры дуги окружности *записать формулировки их определений в отведенных для этого местах и выполнить соответствующие задания **35** и **36**. Причем задача **33** является полным аналогом работы с плакатом (см. рис. **24**), а задача **35** – с плакатом (см. рис. **23**), но при этом не требует от учителя значительных затрат времени на их изготовление.*

3°. Понятие «*вписанный угол*» полезно ввести конструктивно, т.е. показать учащимся, что *вписанный* угол можно построить следующим образом: отметим на окружности некоторую точку A, из точки A проведем два луча AB и AC, пересекающие окружность в точках B и C (рис. 25). Получим угол BAC. Такой угол называется *вписанным углом*. Здесь следует обратить внимание на два важных момента: первое – вершина угла лежит на окружности и второе – стороны угла пересекают окружность. После этого вербально сформулировать определение *вписанного угла*. На этом же рисунке можно показать *центральный угол*, соответствующий построенному *вписанному углу*.

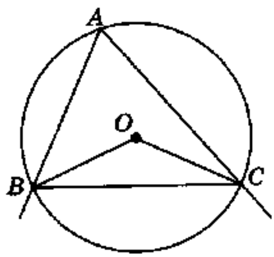


Рис. 25

На формирование умения соотносить *вписанный угол* с соответствующим ему *центральным углом* полезно выполнить следующие упражнения.

1. Нарисуйте несколько вписанных углов, соответствующих данному на рисунке центральному углу (рис. 26).

2. Нарисуйте центральный угол, соответствующий данному на рисунке вписанному углу (рис. 27).

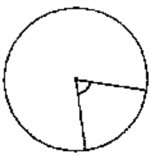


Рис. 26

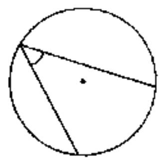


Рис. 27

При этом следует отметить, что для данного *центрального* угла существует как угодно много *вписанных* углов, а для данного *вписанного* угла – только один *центральный* угол.

*В рабочей тетради записать определение вписанного угла и выполнить упражнение **37**. Использование рабочей* *тетради именно в данной теме позволяет сэкономить время учителя при подготовке к уроку, а также время и на самом уроке, выполнить большее число заданий на усвоение введенной терминологии, тем более что в учебнике таких упражнений нет.*

4°. Доказательство *теоремы о вписанном угле* (теорема 11.5) достаточно просто, поэтому его можно провести с активным привлечением учащихся.

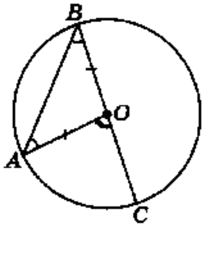


Рис. 28

Если позволяет уровень знаний учащихся, то его можно провести по следующему сценарию. Сначала предложить решить на доске задачу:

Сторона BC вписанного угла ABC является диаметром окружности с центром в точке O. Выразите угол ABC через соответствующий ему центральный угол AOC (рис. 28).

Решение можно выполнить устно, с записью его результата: $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$. Затем по чертежам, аналогичным рисункам 251 б) и в) из учебника, разобрать два других случая расположения сторон вписанного угла.

После разбора всех случаев расположения центра окружности относительно сторон вписанного угла – стороне угла, внутри угла, вне угла – можно сделать обобщение в виде формулировки теоремы о вписанном угле.

Для закрепления формулировки теоремы о вписанном угле можно предложить следующие задания:

Найдите градусную меру углов, обозначенных буквами: α, β, η, σ, τ, ξ и φ.

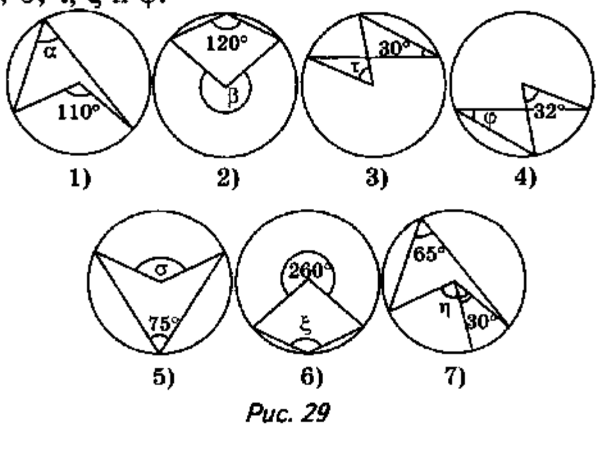


Рис. 29

Поскольку раньше было отмечено, что для данного *центрального* угла существует как угодно много *вписанных* углов, теперь заметим, что все эти углы равны.

Затем можно предложить учащимся решить устно задачу по готовому чертежу:

Докажите, что вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, прямой.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку теоремы о вписанном угле и выполнить задания 38 и 39. Причем задание 39 является полным аналогом работы с плакатом (рис. 29). В рабочей тетради для устного решения рекомендуются задачи ***38–41*** *и* ***43–46****. Часть из них дана в дополнительных задачах, но использование их на уроке без тетради затруднено ввиду сложности чертежей.*

5°. Самостоятельную работу по теме «Углы, вписанные в окружность» рекомендуется провести в начале следующего урока в классе.

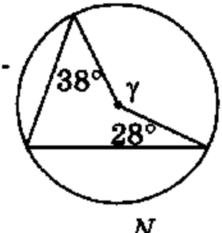
Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пункта 107; решить задачу 50; дома – вопросы 13 – 16 из § 11, задачи 48, 54 и 56.

Самостоятельная работа по теме «Углы, вписанные в окружность»

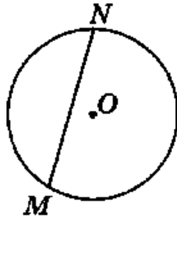
Самостоятельная работа содержит три задачи – со свободным ответом.

1-й вариант



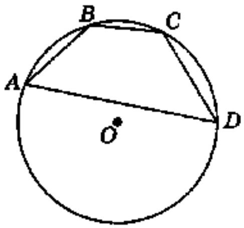
1. По данным рисунка найдите градусную меру угла, обозначенного буквой γ.

Ответ: ____________________



2. Хорда разбивает окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как 4 : 5. Под каким углом видна эта хорда из точек большей дуги?

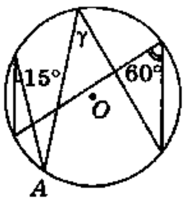
Ответ: ____________________



3. В окружность с центром в точке O вписан четырехугольник $ABCD$. Найдите большие углы этого четырехугольника, если $\angle AOB = 40°$, $\angle BOC = 50°$, $\angle COD = 60°$.

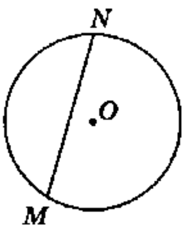
Ответ: ______________________

2-й вариант



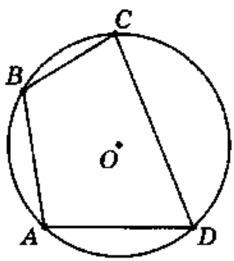
1. По данным рисунка найдите градусную меру угла γ.

Ответ: ______________________



2. Хорда разбивает окружность на две дуги, градусные меры которых относятся как 1 : 2. Определите, под каким углом видна эта хорда из точек меньшей дуги.

Ответ: ______________________



3. Вершины четырехугольника $ABCD$ лежат на окружности и разбивают ее на четыре дуги, градусные меры которых последовательно относятся как 3 : 7 : 5 : 3. Найдите больший угол четырехугольника.

Ответ: ______________________

Указания к задачам

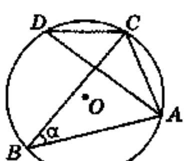


Рис. 30

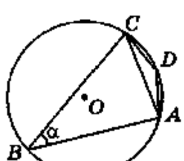


Рис. 31

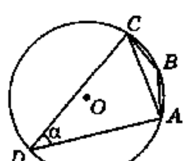


Рис. 32

55. 1-й случай. $\angle ABC$ и $\angle ADC$ – вписанные углы, вершины которых лежат по одну сторону от прямой AC (рис. 30). По следствию из теоремы о вписанных углах они равны. Следовательно, $\angle ADC = \alpha$.

2-й случай. Несложно вывести в качестве следствия из теоремы о вписанном угле, что сумма двух вписанных углов ABC и ADC, вершины которых лежат по разные стороны от AC, равна $180°$. В нашем случае существуют два варианта расположения точек A, B, C, D (рис. 31 и 32):

а) на рисунке 31: $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$, $\angle ADC = 180° - \frac{1}{2}\angle AOC = 180° - \alpha$.

б) на рисунке 32: $\angle ABC = 180° - \frac{1}{2}\angle AOC = \alpha$, $\angle ADC = \frac{1}{2}\angle AOC = 180° - \alpha$.

58. Пусть A и C – данные точки и $\angle ABC = \alpha$ (рис. 264 учебника).

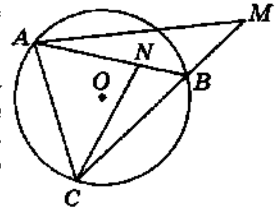


Рис. 33

Около ΔABC опишем окружность. Тогда $\angle ABC$ будет вписанным и все вписанные углы, вершины которых лежат на построенной окружности по ту же сторону от прямой AC, что и точка B, равны α. Докажем, что данным свойством обладают только точки построенной дуги окружности. Все углы, вершины которых лежат на построенной окружности по другую сторону от прямой AC, равны $180° - \alpha$ (задача 55).

Предположим, что вершины углов (точки B) лежат либо внутри окружности, либо вне окружности (рис. 33):

а) вершины лежат внутри окружности, например точка N. Тогда $\angle ANC > \angle ABC$, так как $\angle ANC$ – внешний угол ΔBCN; следовательно, $\angle ANC > \alpha$;

б) вершины лежат вне окружности, например точка M. Тогда $\angle AMC < \angle ABC$, так как $\angle ABC$ – внешний угол ΔABM; следовательно, $\angle AMC < \alpha$.

60. Задача повышенной трудности.

Так как в условии задачи задан угол α и противолежащая ему сторона a, то можно попытаться построить геометрическое место точек вершин данного угла, опирающегося на дугу, стягиваемую хордой, равной стороне, противолежащей данному углу. Одна из этих вершин будет вершиной равнобедренного треугольника. Поэтому сначала нужно решить следующую задачу: построить равнобедренный треугольник по углу при вершине и основанию.

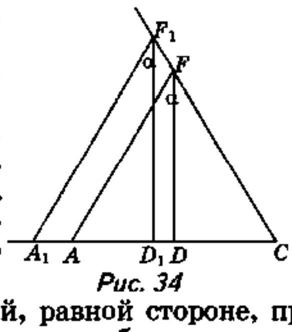


Рис. 34

Рис. 35

Анализ. Предположим, что ΔAFC – искомый (рис. 34): $AC = a$, $\angle AFC = \alpha$. Проведем биссектрису FD угла AFC, она является одновременно высотой и медианой ΔAFC (§ 3 пункт 26).

Построение. Строим угол F_1, равный α. Проводим биссектрису F_1D_1 этого угла. На стороне угла отметим точку C и проведем луч CB, перпендикулярный F_1D_1. На этом луче от точки C отложим отрезок $CA = a$. Через точку A проведем прямую AF, параллельную прямой A_1F_1 до пересечения с лучом CF_1 в точке F. Полученный треугольник AFC – искомый.

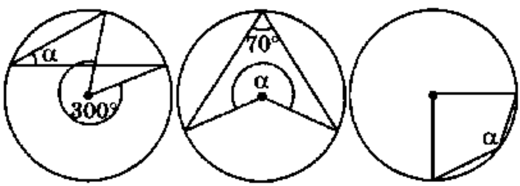
Теперь построим треугольник, удовлетворяющий требованиям задачи.

Построение (рис. 35). Опишем вокруг равнобедренного треугольника AFC с основанием a и углом при вершине α окружность и проведем прямую b параллельно основанию AC на расстоянии h от него. Точка B является точкой пересечения этой прямой b с окружностью. Полученный треугольник ABC – искомый: $BC = a$, $\angle ABC = \angle AFC = \alpha$, по следствию из теоремы о вписанном угле, $BG \perp AC$, $BG = h$ по определению расстояния между параллельными прямыми.

Дополнительные задачи

1. Чему равна градусная мера дуги окружности, если соответствующий центральный угол равен: а) 27°; б) 13°; в) 335°?

2. Окружность разделена на две дуги, причем градусная мера одной из них в 3 раза больше градусной меры другой. Сколько градусов содержат соответствующие центральные углы?



1) 2) 3) 4)

Рис. 36

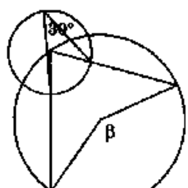


Рис. 37

3. По данным рисунка 36 найдите градусную меру углов, обозначенных буквой α.

4. По данным рисунка 37 найдите градусную меру угла, обозначенного буквой β.

5. Вписанный угол на 25° меньше центрального, опирающегося на ту же дугу. Найдите градусные меры этих углов.

Пропорциональность отрезков хорд и секущих окружности

Комментарий для учителя

В пункте 108 учащиеся знакомятся с некоторыми свойствами отрезков хорд и секущих окружности. Доказательство теорем о свойствах отрезков хорд и секущих окружности опирается на подобие треугольников. Поэтому никаких новых понятий предварительно вводить не надо, что значительно упрощает объяснение вводимых свойств и их усвоение учащимися.

Текущие результаты изучения пункта 108. Учащиеся должны научиться:

– *выделять в конфигурации*, данной в условии задачи, *пересекающиеся хорды* и *секущие окружности*;

– *формулировать и доказывать* теоремы о свойствах отрезков *хорд* и *секущих окружности*;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- теоремы о свойствах отрезков *хорд* и *секущих окружности*;
- алгебраический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

Сформулированные в данном пункте утверждения являются фактически двумя задачами, с решением которых вполне могут справиться учащиеся самостоятельно. Поэтому их можно предложить разобрать учащимся самостоятельно по учебнику.

После разбора утверждения о свойстве отрезков хорд полезно предложить учащимся следующую задачу:

> Точка A лежит внутри окружности радиуса R на расстоянии a от ее центра – точки O. Хорда BC проходит через точку A. Докажите, что произведение $BA \cdot AC$ является величиной постоянной для данной окружности и данной точки в этой окружности и равно $R^2 - a^2$.

После разбора утверждения о свойстве отрезков секущих окружности полезно предложить учащимся решить задачу 62 из учебника. Таким образом, получили утверждение: квадрат касательной равен произведению отрезков секущей, проведенной из той же точки, что и касательная. С другой стороны, применяя теорему Пифагора, получим, что квадрат касательной равен $a^2 - R^2$. Из этих двух утверждений можно сделать следующий вывод:

Точка A лежит вне окружности радиуса R на расстоянии a от ее центра – точки O. Секущая проходит через точку A и пересекает окружность в точках B и C. Докажите, что произведение $BA \cdot AC$ является величиной постоянной для данной окружности и данной точки вне этой окружности и равно $a^2 - R^2$.

После этого полезно решить задачу 1 из дополнительных задач и заметить, что ответ не зависит от расположения точки A.

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировки свойств отрезков хорд и секущих окружности и выполнить задания **49–52**. Последовательность этих задач повторяет схему урока, данную выше. Задача **52** дана в дополнительных задачах.*

*В рабочей тетради для устного решения рекомендуются задачи **38–41** и **43–46**. Использование их на уроке без тетради затруднено ввиду сложности чертежей.*

Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе провести самостоятельную работу по теме «Углы, вписанные в окружность»; рассмотреть весь теоретический материал пункта 108, решить задачу 62, дома – вопрос 20 из § 11, задачи 51, 53 и 61.

Дополнительные задачи

1. Через точку M в окружности с центром в точке O проведены две прямые. Одна из них пересекает окружность в точках A и B, вторая – в точках C и D. При этом $AM = 6$ см, $MB = 4$ см, $CM = 8$ см. Найдите MD для случаев: а) точка M лежит внутри окружности, б) точка M лежит вне окружности.

Измерение углов, связанных с окружностью

Комментарий для учителя

В пункте 109 учащиеся продолжают знакомиться с углами, связанными с окружностью. Доказательство теорем об измерении *углов*, вершины которых лежат внутри или вне окружности, а также углов, образованных касательной к окружности и хордой окружности, опираются на понятие вписанного угла и теоремы об измерении вписанного угла.

Текущие результаты изучения пункта 109. Учащиеся должны научиться:

– *изображать, обозначать и распознавать* на чертежах и рисунках углы, вершины которых лежат внутри или вне окружности, а также углы, образованные касательной к окружности и хордой окружности;

– *выделять в конфигурации*, данной в условии задачи, углы, вершины которых лежат внутри или вне окружности, а также углы, образованные касательной к окружности и хордой окружности;

– *формулировать и доказывать* теоремы об измерении *углов*, вершины которых лежат внутри или вне окружности, а также углов, образованных касательной к окружности и хордой окружности;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- теоремы об измерении *углов*, вершины которых лежат внутри или вне окружности;
- теорему об измерении углов, образованных касательной к окружности и хордой окружности;
- алгебраический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Рассмотрение теорем об *измерении угла с вершиной внутри круга*, *угла с вершиной вне круга* (теорема 11.6), *угла между хордой и касательной* (теорема 11.7) можно провести в форме беседы, в ходе которой последовательно решить следующие три задачи:

> I. Докажите, что градусная мера угла, вершина которого лежит внутри окружности, равна полусумме градусных мер дуг, из которых одна заключена между его сторонами, а другая между продолжениями сторон.
>
> II. Докажите, что градусная мера угла, вершина которого лежит вне окружности, равна полуразности градусных мер дуг, заключенных между его сторонами.
>
> III. Докажите, что градусная мера угла, образованного касательной и хордой, равна половине градусной меры дуги, заключенной внутри него.

После этого следует сравнить формулировки задач I и II и формулировку теоремы 11.6, заметив, что это разные формулировки одного и того же утверждения. Аналогично, формулировки задачи III и теоремы 11.7 также являются разными формулировками одного и того же утверждения. Затем можно предложить учащимся решить задачи **68** и **69** из учебника и задачу 1 из дополнительных задач. В развитие задачи **1** из дополнительных задач хорошо предложить задачу **2**. Задачи **3** и **4** из дополнительных задач можно предложить для решения наиболее успешным учащимся.

*При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку теоремы об измерении углов, вершины которых лежат внутри окружности. Разобрать под руководством учителя доказательство теоремы. Затем сформулировать теорему об измерении углов, вершины которых лежат вне окружности, и теорему об измерении угла между хордой и касательной и доказать их. Доказать утверждение задачи **53** и на ее закрепление выполнить задания **54** и **55**. Эти три задачи аналогичны задаче **68** учебника. Задачи **56** и **57** даны в дополнительных задачах под номерами **3** и **4** и их можно предложить для решения хорошо успевающим учащимся.*

*Задание **58** – это задача **69** из учебника, в рабочей тетради полезно записать ее решение.*

Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пункта 109, решить задачи 68 и 69 из учебника и задачи 1 и 2 из дополнительных задач, дома – вопросы 17, 18 и 19 из § 11, задачи 65, 66 и 67.

Указания к задачам

Задача **69** является задачей повышенного уровня сложности.

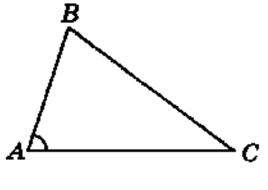


Рис. 38

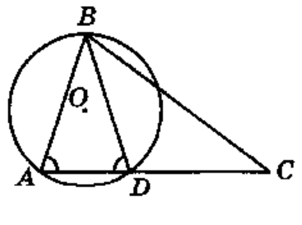


Рис. 39

Так как в условии задачи даны угол $A = \alpha$ и прилежащая к нему сторона $AB = a$ в треугольнике ABC (рис. 38), то можно попытаться построить угол, равный данному углу α и лежащий против стороны AB. Поэтому сначала нужно решить следующую задачу: построить равнобедренный треугольник ABD по углу при основании и боковой стороне. Такой треугольник мы строили неоднократно. Опишем около этого треугольника ABD окружность. Большая дуга, опирающаяся на хорду AB, и является искомым геометрическим местом точек (рис. 39).

Дополнительные задачи

1. Докажите, что градусная мера угла, образованного двумя касательными, проведенными из одной точки к окружности, равна полуразности градусных мер дуг, заключенных между точками касания.

2. Окружность касается одной из сторон угла, равного 40°, в его вершине – точке A и пересекает другую сторону в точке B. На меньшей дуге отмечена точка M. Найдите угол AMB.

3*. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вершины которого лежат на окружности, пересекаются в точке M. Известно, что $\angle ABC = 72°$, $\angle BCD = 102°$, $\angle AMD = 110°$. Найдите $\angle ACD$.

Решение. 1-й способ. Пусть $\angle ACD = x$, тогда $\angle BCA = 102° - x$,

$\angle ABD = \angle ACD = x$, $\angle CBD = 72°$. Имеем $\angle BCM + \angle CBM + \angle BMC = (102° - x) + (72° - x) + 110° = 180°$, откуда $x = 52°$.

2-й способ. $\overset{\smile}{AD} + \overset{\smile}{CD} = 144°$, $\overset{\smile}{AD} + \overset{\smile}{AB} = 204°$,

$\overset{\smile}{AD} + \overset{\smile}{BC} = 220°$. $\overset{\smile}{AD} + \overset{\smile}{CD} + \overset{\smile}{AD} + \overset{\smile}{AB} + \overset{\smile}{AD} + \overset{\smile}{BC} = 568°$.

$2\overset{\smile}{AD} + (\overset{\smile}{AB} + \overset{\smile}{BC} + \overset{\smile}{CD} + \overset{\smile}{AD}) = 568°$. $2\overset{\smile}{AD} + 360° = 568°$.

$\overset{\smile}{AD} = 104°$, значит, $\angle ACD = 52°$ (рис. 40).

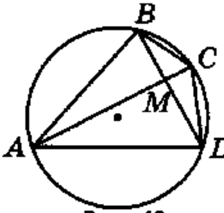


Рис. 40

4*. Диагонали четырехугольника $ABCD$, вершины которого лежат на окружности, пересекаются в точке M (рис. 41), причем $\angle AMB = 80°$. Прямые AB и CD пересекаются в точке K, причем $\angle AKD = 20°$, а прямые BC и DA пересекаются в точке N и $\angle ANB = 40°$. Найдите углы четырехугольника $ABCD$.

Решение. Обозначим градусную меру последовательно расположенных дуг AB, BC, CD и DA соответственно x_1, x_2, x_3 и x_4 (рис. 41).

Тогда: $x_2 - x_4 = 40°$, по условию задачи и в силу теоремы об измерении угла с вершиной вне круга;

$x_2 + x_4 = 200°$, по условию задачи и в силу теоремы об измерении угла с вершиной внутри круга;

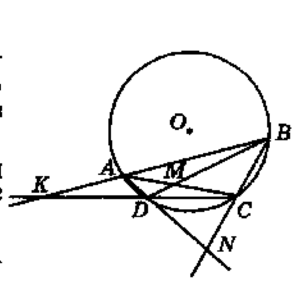


Рис. 41

$x_1 - x_3 = 80°$, по условию задачи и в силу теоремы об измерении угла с вершиной вне круга;

$x_1 + x_3 = 160°$, по условию задачи и в силу теоремы об измерении угла с вершиной внутри круга.

Отсюда $x_1 = 120°$, $x_2 = 120°$, $x_3 = 40°$, $x_4 = 80°$. По теореме об измерении вписанного угла $\angle DAB = \frac{1}{2}(120° + 40°) = 80°$, так как опирается на дугу BD, равную сумме дуг BC и DC, $\angle ABC = \frac{1}{2}(40° + 80°) = 60°$, так как опирается на дугу CA, равную сумме дуг DC и AD, $\angle BCD = \frac{1}{2}(120° + 80°) = 100°$, так как опирается на дугу DB, равную сумме дуг AB и AD, $\angle ADC = \frac{1}{2}(120° + 120°) = 120°$, так как опирается на дугу AC, равную сумме дуг AB и BC.

Систематизация и обобщение знаний по теме «Подобие фигур»

Комментарий для учителя

1°. В результате систематизации и обобщения знаний по теме «Подобие фигур» учащиеся должны:

– *выделять* из данной конфигурации подобные треугольники и заданные в условии задачи их элементы и конфигурации;

– *изображать, обозначать* и *распознавать* на чертежах и рисунках углы, связанные с окружностью, центральный угол в окружности;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- признаки подобия треугольников;
- теоремы об углах, связанных с окружностью;
- алгебраический аппарат;
- ранее изученные определения, признаки и свойства геометрических фигур;

– *применять* при решении задач на построение:

- понятие подобия.

Выпускник получит возможность:

• *овладеть методом подобия решения задач на вычисления и доказательства;*

• *научиться решать задачи на построение методом геометрического места точек и методом подобия.*

2°. Подготовку к контрольной работе по теме «Подобие фигур» полезно организовать как урок решения задачи. Для этого можно использовать задачи: **19**, **27**, **28**, **29**, **42**, **52**, **57**, **58**, **59**, **60**, **63**, **64** из учебника, в ходе решения которых провести повторение по материалу параграфа. Кроме того, можно подобрать задачи из разделов «Дополнительные задачи» в зависимости от уровня подготовки класса.

В сборнике тестов Т.М. Мищенко «Геометрия. Тесты. 9 класс» к учебнику А.В. Погорелова издательства «Просвещение» для § 11 «Подобие фигур» рекомендованы тесты 2, 3 и 4, направленные на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении этой темы. Каждый тест имеет четыре варианта.

Повторение можно организовать несколькими способами.

Первый способ: итоговый тест по теме можно создать из тестов 2, 3 и 4, используя часть заданий из каждого теста. При этом полезно включить в него задания 7 и 8 из теста 2, задания 6 и 8 из вариантов теста 3 и задания 7 и 9 из вариантов теста 4. Следует заметить, что в зависимости от уровня класса можно использовать и более легкие задания тестов, и более сложные. Кроме того, полезно разобрать хотя бы одну из десяти задач теста 3, решение которых требует знания и понимания применения признаков подобия треугольников.

Второй способ. Однако поскольку тесты не предполагают письменного оформления каждого задания, то можно из каждого теста выполнить по одному варианту устно.

Первый способ более приемлемый, так как при разборе заданий позволяет более глубоко и всесторонне систематизировать пройденный материал. Разобрать решения заданий следует сразу после выполнения тестов с активным привлечением учащихся.

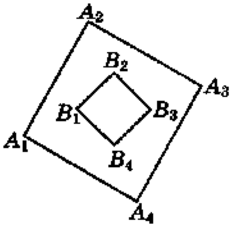
3°. Контрольная работа рассчитана на один урок (45 минут). В контрольной работе первые четыре задачи – это задачи с выбором ответа и со свободным ответом. Надо напомнить учащимся, что делать запись решения этих задач не следует. Такую запись можно делать на черновиках, но их сдавать на проверку не надо. В задачах 5 и 6 решение записывается полностью с краткой записью условия и выполнением чертежа.

> *При использовании в учебном процессе рабочей тетради ее можно использовать как конспект темы и просмотреть решение опорных задач. Поскольку в рабочей тетради по каждому пункту темы дано избыточное число задач, то из не решенных в процессе изучения темы задач можно сделать подборку для урока повторения.*

4°. На последнем уроке данной темы на дом следует задать повторение материала, используемого при доказательстве теоремы синусов. В доказательстве теоремы используются геометрическое представление суммы (разности) двух векторов и формула для вычисления скалярного квадрата суммы (разности) векторов (пункты 94 и 98, § 10). В формулировке следствия из теоремы косинусов используется понятие «проекция наклонной», введенное в курсе VIII класса (пункт 65, § 7). Следует повторить также соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике (пункт 67, § 7) и формулы приведения (пункт 81, § 7).

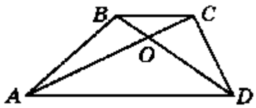
Контрольная работа по теме «Подобие фигур»

1-й вариант



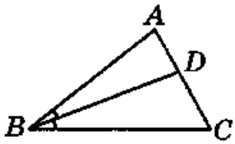
1. Квадраты $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$ подобны. Коэффициент подобия равен 4. Найдите периметр квадрата $A_1A_2A_3A_4$, если $B_1B_2 = 3$ см.

*Ответ:*____________________



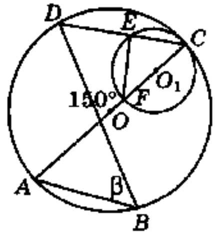
2. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке O, которая делит диагональ AC на отрезки $OC = 6$ см и $OA = 12$ см. Найдите диагональ BD, если $OB = 6$ см.

Ответ: 1. 6 см; 2. 18 см; 3. 12 см; 4. 24 см.



3. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Точка D делит сторону AC на отрезки AD и DC, соответственно равные 3 см и 5 см. Найдите сторону AB, если сторона BC равна 10 см.

*Ответ:*____________________

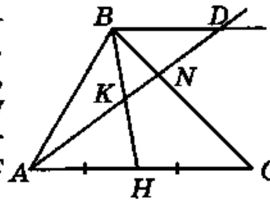


4. Две окружности касаются в точке C. Угол между линией центров и хордой FE меньшей окружности равен 150°. Найдите градусную меру угла β.

*Ответ:*____________________

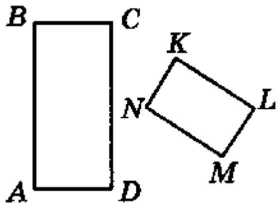
5. Боковая сторона и основание одного равнобедренного треугольника соответственно равны 34 см и 20 см, а боковая сторона и основание другого равнобедренного треугольника – 17 см и 10 см. Определите, подобны ли эти треугольники.

6. Через вершину B треугольника ABC проведена прямая BD, параллельная AC. Через точку N, лежащую на стороне BC, проведен луч AN, пересекающий эту прямую в точке D, а медиану BH в точке K. В каком отношении точка K делит медиану BH, если $BN : NC = 1 : 2$?



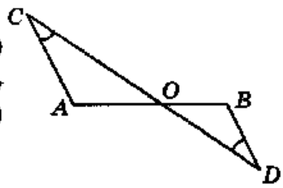
2-й вариант

1. Прямоугольники $ABCD$ и $KLMN$ подобны. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если $BC = 6$ см, $KL = 4$ см, а $LM = 3$ см.



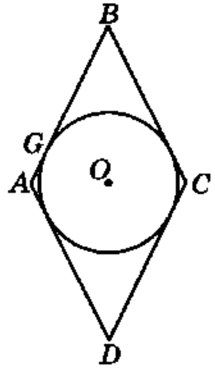
*Ответ:*________________________

2. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $\angle ACO = \angle BDO$. Найдите длину отрезка AB, если $OB = 6$ см, $OC = = 10$ см, $OD = 5$ см.

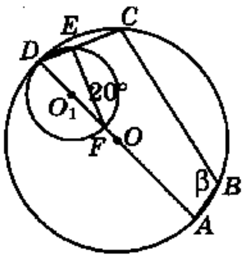


Ответ: 1. 15 см; 2. 12 см; 3. 18 см; 4. 20 см.

3. В ромб $ABCD$ вписана окружность. Точка касания окружности G делит сторону ромба AB на отрезки AG и GB, соответственно равные 2 см и 8 см. Найдите радиус вписанной окружности.



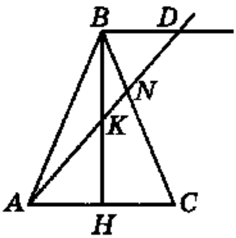
*Ответ:*________________________



4. Две окружности касаются в точке D. Угол между диаметром FD и хордой FE меньшей окружности равен 20°. Найдите градусную меру угла β.

*Ответ:*________________________

5. Гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны 85 см и 40 см, а гипотенуза и катет другого прямоугольного треугольника – 17 см и 8 см. Определите, подобны ли эти треугольники.



6. Через вершину B равнобедренного треугольника ABC проведена прямая BD, параллельная основанию AC. Через точку K – середину высоты BH проведен луч AK, пересекающий эту прямую в точке D, а сторону BC в точке N. В каком отношении точка N делит сторону BC?

§ 12. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Тема «*Решение треугольников*» является одной из ведущих тем курса планиметрии. В параграфе рассматриваются теоремы косинусов и синусов и утверждение о соотношении между углами и сторонами треугольника (в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, против большей стороны лежит больший угол). Полученные при изучении темы «*Решение треугольников*» знания широко применяются при решении большого класса вычислительных задач, при анализе условий задач на построение. Доказанные здесь теоремы *косинусов* и *синусов* позволяют по трем заданным элементам треугольника находить все остальные его элементы. Рассматриваются три типа задач на решение треугольников: 1) по данной стороне и двум углам; 2) по двум сторонам и углу между ними; 3) по трем сторонам. В данном методическом пособии рассматривается еще одна задача на решение треугольников: по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них. Эта задача является задачей повышенной сложности, поэтому ее можно не рассматривать на уроке в общем виде с полным исследованием. Однако если учитель сочтет возможным рассмотреть ее на уроке, то достаточно дать схему решения и перейти к задачам с числовыми данными. Изучение темы позволяет провести обобщающее повторение решения прямоугольных треугольников (8 класс, пункт 81 § 7) и построение треугольников (7 класс, пункты 42–47, § 5). Теоремы синусов и косинусов используются далее в курсе планиметрии при выводе формул для вычисления площадей некоторых простых фигур и в решениях задач. К тому же умение решать произвольный треугольник по трем заданным элементам широко применяется в курсе стереометрии.

Планируемые итоговые результаты изучения § 12:

Учащиеся должны научиться:

– *выделять* на чертеже, данном в условии задачи, конфигурации, необходимые для решения треугольников;

– *иллюстрировать* и *объяснять* формулировки: теоремы косинусов и теоремы синусов, соотношения между углами и сторонами треугольника;

– *оперировать* с начальными понятиями тригонометрии и выполнять элементарные операции над функциями углов;

– *объяснять* термин «*решение треугольников*»;

– *решать* треугольники в общем виде;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- теоремы косинусов и синусов, соотношения между углами и сторонами треугольника;
- определения и свойства тригонометрических функций и тригонометрических тождеств.

Теорема косинусов

Комментарий для учителя

Основное содержание этого пункта составляют теорема косинусов и следствие из нее, которое является модификацией теоремы косинусов, удобной для использования в решении некоторых задач.

В доказательстве теоремы косинусов используются геометрическое представление суммы (разности) двух векторов и формула для вычисления скалярного квадрата разности векторов. Доказательство теоремы косинусов векторным методом позволяет доказать эту теорему в общем виде, не рассматривая отдельно случаи для острого, прямого и тупого углов; благодаря этому доказательство выглядит весьма изящно и компактно.

При обосновании следствия из теоремы косинусов используется понятие *«проекция наклонной»*, введенное в курсе VIII класса (§ 7, п. 65). Следует повторить также соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике (§ 7, п. 67).

Текущие результаты изучения пункта 110. Учащиеся должны научиться:

– *иллюстрировать* и *объяснять* формулировку теоремы косинусов;

– *доказывать* теорему косинусов;

– *выделять* в конфигурации, данной в условии задачи, конфигурацию, позволяющую применить теорему косинусов;

– *записывать* в виде равенства теорему косинусов применительно к данному треугольнику;

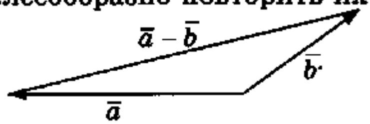
– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- теорему косинусов;
- определения и свойства тригонометрических функций и тригонометрических тождеств.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. В доказательстве *теоремы косинусов* используются ссылки на ранее введенное определение *разности двух векторов* и формула для вычисления *скалярного квадрата разности век-*

торов. Поэтому перед началом объяснения формулировки и доказательства *теоремы косинусов* целесообразно повторить их с учащимися. При этом полезно в виде рисунка и формулы зафиксировать их на доске и сохранять до конца работы над теоремой (рис. 42).



а)

$$\boxed{(\bar a - \bar b)^2 = \bar a^2 - 2\bar a\,\bar b + \bar b^2}$$

б)

Рис. 42

2°. *Изучение теоремы* начинается с ее формулировки и выполнения рисунка 43. При этом полезно выделить в треугольнике данные элементы более жирным изображением или цветом, после чего сделать краткую запись условия и заключения теоремы. Заметим, что в учебнике чертежей к условию теоремы и ее доказательству нет, поэтому полезно чертеж и краткую запись условия и заключения теоремы предложить учащимся сделать в тетрадях.

Дано: AB и AC – стороны ΔABC, $\angle A$ – угол ΔABC (рис. 43).

Доказать: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC\cos A$.

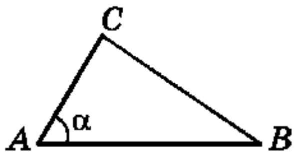


Рис. 43

3°. Доказательство *теоремы косинусов* достаточно просто, поэтому его можно провести с активным привлечением учащихся. При этом необходимо показать на чертеже, как вводятся векторы. Таким образом, на доске присутствуют два рисунка: один соответствует условию задачи (рис. 43), а второй определяет метод доказательства (рис. 44), при котором стороны треугольника заменены их векторным изображением, что, в частности, задает и угол между сторонами.

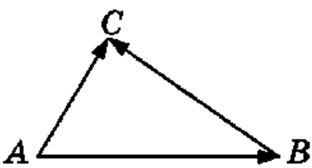


Рис. 44

Затем можно предложить учащимся самостоятельно провести доказательство по плану:

1. Выразите вектор BC через векторы AC и AB.
2. Возведите обе части полученного равенства в квадрат.
3. Выразите скалярное произведение векторов AB и AC через их модули и косинус угла между ними.

На непосредственное применение теоремы косинусов можно предложить следующее упражнение.

> В треугольнике ABC: $AB = 2$ см, $AC = 3$ см, $\angle BAC = 60°$. Найдите сторону BC.

Затем следует решить задачу 1 из учебника и сделать вывод: *«теорема косинусов позволяет, зная стороны треугольника, найти его углы»*.

4°. Переформулируем теорему косинусов: «*Для любого треугольника со сторонами a, b и c и углом γ, противолежащим стороне c, справедливо равенство $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$*».

1. Если угол γ – острый, то $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ и $\cos\gamma > 0$, значит, $c^2 < a^2 + b^2$.

2. Если угол γ – прямой, то $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ и $\cos\gamma = 0$, значит, $c^2 = a^2 + b^2$. Следовательно, теорема Пифагора является частным случаем *теоремы косинусов*.

3. Если угол γ – тупой, то $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ и $\cos\gamma < 0$, значит, $c^2 > a^2 + b^2$.

Проведя эти исследования, мы фактически решили задачу, обратную задаче 3 из учебника.

В задаче 3 из учебника сформулированы условия, позволяющие определить вид угла. Условия, позволяющие определить, что угол γ – прямой, следуют из обратной теоремы Пифагора.

Воспользовавшись результатами задачи 3 из учебника и обратной теоремой Пифагора, решите следующую задачу:

> Дан треугольник со сторонами a, b и c. Против стороны c лежит угол γ. Определите, каким – прямым, тупым или острым – является угол γ, если: а) $a = 8$; $b = 15$; $c = 17$; б) $a = 8$; $b = 6$; $c = 11$; в) $a = 7$; $b = 6$; $c = 8$.

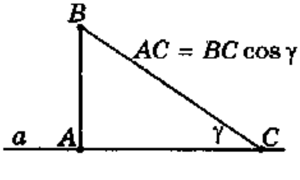


Рис. 45

5°. После проведенного выше анализа теоремы косинусов рассмотрение *следствия* из *теоремы косинусов* можно предложить учащимся как самостоятельную работу по учебнику. Перед рассмотрением следует, используя рисунок 45, повторить понятие проекции наклонной.

После этого следует разобрать по тексту учебника задачу 7.

В зависимости от уровня подготовки класса на формирование умения применять *теорему косинусов* можно использовать задачи 1–3 из дополнительных задач.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку* теоремы косинусов *и краткую запись условия и заключения теоремы. На непосредственное применение теоремы косинусов решить задачу 60. Рассмотрение вопроса о зависимости длины стороны c от вида угла γ, против которого она лежит, можно провести в ходе выполнения упражнения 61. При этом можно ее решение совместить с устным решением задачи 3 из учебника. После этого решить задачу 62. В зависимости от уровня подготовки*

> ***класса для формирования умения применять*** теорему косинусов ***можно использовать задачи 60–63. Эти задачи можно использовать на уроках систематизации и обобщения знаний.***

Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пункта 110; решить задачи 1, 3 и 7; дома – вопрос 1 из § 12, задачи 2, 5 и 8 (для случая: высота проведена к большей стороне).

Указания к задачам

При решении задачи 4 следует воспользоваться свойством диагоналей параллелограмма. Обозначим острый угол при пересечении диагоналей α, тогда меньшая сторона параллелограмма равна $\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{d}{2}\right)^2-2\frac{c}{2}\frac{d}{2}\cos\alpha} = \frac{\sqrt{c^2+d^2-2cd\cos\alpha}}{2}$. Большая сторона лежит против тупого угла, смежного с углом α. Значит, большая сторона равна $\frac{\sqrt{c^2+d^2+2cd\cos\alpha}}{2}$.

5. Обозначим острый угол параллелограмма α, тогда меньшая диагональ параллелограмма лежит против острого угла и равна $\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$, большая диагональ лежит против тупого угла и равна $\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$.

Решение задачи 8 следует из решения задачи 7, результатом которой следует воспользоваться.

При решении задачи 9 необходимо выполнить дополнительное построение: достроить данный треугольник до параллелограмма так, чтобы сторона, к которой проведена медиана, стала диагональю параллелограмма.

В решении задачи 10 можно воспользоваться свойством биссектрисы угла треугольника, рассмотренным в пункте **106 § 11** учебника.

В решении задачи 11 нужно воспользоваться теоремой **7.5** об изменении $\cos\alpha$ при возрастании острого угла α и формулой $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

Дополнительные задачи

1. Основание треугольника равно 6 см, один из углов при основании равен 120°, сторона, лежащая против этого угла, равна 14 см. Найдите третью сторону.

2. Сторона треугольника равна 26 см, а две другие стороны образуют угол, равный 120°, и относятся как 7 : 8. Найдите эти стороны.

3. Основание треугольника равно 7 см, противолежащий ему угол равен 60°, сумма двух других сторон равна 13 см. Найдите эти стороны.

Теорема синусов

Комментарий для учителя

Основное содержание этого пункта составляет теорема синусов. Следует заметить, что применение теоремы синусов при решении треугольников менее трудоемко, чем использование теоремы косинусов.

Текущие результаты изучения пункта 111. Учащиеся должны научиться:

– *иллюстрировать* и *объяснять* формулировку теоремы синусов;

– *доказывать* теорему синусов;

– *выделять* в конфигурации, данной в условии задачи, конфигурацию, позволяющую применить теорему синусов;

– *записывать* в виде пропорции для сторон и синусов углов теорему синусов применительно к данному треугольнику;

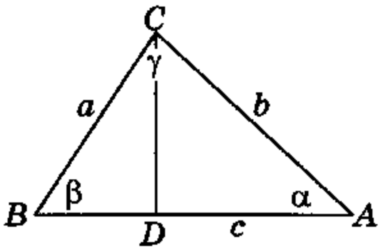
– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- теорему синусов;
- определения и свойства тригонометрических функций и тригонометрические тождества.

Методические рекомендации к изучению материала

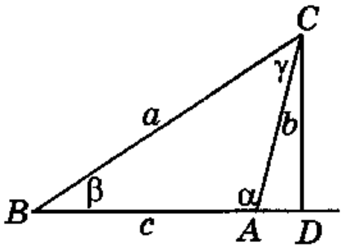
1°. Доказательство *теоремы синусов* достаточно просто и его можно провести с активным участием учащихся. Решение задачи 13 можно предложить учащимся разобрать по тексту учебника дома.

Проводя в классе *доказательство теоремы синусов,* полезно сделать следующую краткую запись, которая поможет учащимся лучше усвоить доказательство теоремы. При этом рисунок можно не переносить из учебника на доску для экономии времени.



$\alpha < 90^\circ$, $\beta < 90^\circ$
$CD = b\sin\alpha$,
$CD = a\sin\beta$
$b\sin\alpha = a\sin\beta$

Рис. 46



$\alpha > 90^\circ$
$CD = b\sin(180^\circ - \alpha) = b\sin\alpha$;
$CD = a\sin\beta$
$b\sin\alpha = a\sin\beta$

Рис. 47

Таким образом, теорема синусов справедлива для любого треугольника.

На формирование умения применять *теорему синусов* полезно решить следующие задачи:

1. В треугольнике ABC: $AB = 8$ см, $BC = 12$ см. Может ли $\sin C = 0{,}7$?

2. Основание треугольника равно 10 см, один из углов при основании равен 45°, а противолежащий угол равен 60°. Найдите сторону, противолежащую углу в 45°.

3. Один из углов равнобедренного треугольника 120°. Найдите отношение сторон этого треугольника.

В задаче 13 рассматривается полезное утверждение: «*Для любого треугольника отношение стороны к синусу противолежащего угла равно диаметру описанной окружности*». На это утверждение можно ссылаться при решении задач.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку* теоремы синусов. *На непосредственное применение теоремы синусов решить задачи 68–70 (это те же задачи, что приведены выше). В тексте тетради разобрано решение задачи 72, в котором сочетаются предыдущая тема (измерение углов, связанных с окружностью) и теорема синусов.

Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пункта 111; решить задачи 13 и 15; дома – вопрос 3 из § 12, задачи 12, 14 и 16.

Указания к задачам

12. Угол β лежит против стороны $AC = b = 10$ см, а против стороны $AB = c = 15$ см лежит угол γ. Предположим, что $\sin\beta = \frac{3}{4}$. Применим теорему синусов и составим пропорцию: $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$. Отсюда $\sin\gamma = \frac{c\sin\beta}{b} = \frac{15\cdot\frac{3}{4}}{10} = \frac{9}{8} > 1$. Пришли к противоречию. Следовательно, $\sin\beta \neq \frac{3}{4}$.

14. Поскольку заданы три стороны треугольника, то можно найти косинус одного из углов, затем найдем синус этого же угла. Теперь можно воспользоваться результатом задачи **13**.

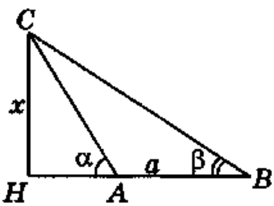


Рис. 48

16. К треугольнику ABC (рис. 48) применим теорему синусов и найдем сторону $AC = b$, $\angle ACB = \gamma = \alpha - \beta$:

$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin(\alpha-\beta)}$; $b = \frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}$. Из прямоугольного треугольника CHA найдем катет

$$CH = \frac{b\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}\cdot\sin\alpha = \frac{b\sin\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Дополнительные задачи

1. Диагональ параллелограмма делит его угол на части, равные 45° и 30°. Найдите отношение сторон параллелограмма.
2. Диагональ d параллелограмма делит его угол на части, равные α и β. Найдите стороны параллелограмма.

Соотношение между углами треугольника и противолежащими сторонами

Комментарий для учителя

Основное содержание этого пункта составляет утверждение о соотношении между углами треугольника и противолежащими сторонами (в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, против большей стороны лежит больший угол), которое фактически является следствием из теоремы синусов. Это одно из немногих утверждений, задающее неравенство элементов треугольника. Ранее были изучены: неравенство треугольника, утверждение о том, что гипотенуза прямоугольного треугольника больше его катета, теорема о внешнем угле треугольника.

Текущие результаты изучения пункта 112. Учащиеся должны научиться:

– *иллюстрировать*, *объяснять* и *доказывать* утверждение о соотношении между углами треугольника и противолежащими сторонами;

– по данным сторонам треугольника упорядочивать углы треугольника по возрастанию или убыванию их градусных мер и наоборот;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- утверждение о соотношении между углами треугольника и противолежащими сторонами;
- определения и свойства тригонометрических функций и тригонометрические тождества.

Методические рекомендации к изучению материала

Доказательство утверждения о соотношении между углами треугольника и противолежащими сторонами достаточно просто и его можно провести с активным участием учащихся.

В формулировке утверждения одновременно дано прямое и обратное утверждение, поэтому полезно записать на доске условие и заключение прямого и обратного утверждения.

Прямое утверждение	Обратное утверждение
I. Дано: ΔABC; $\alpha > \beta$, Доказать: $a > b$	II. Дано: ΔABC; $a > b$, Доказать: $\alpha > \beta$

После доказательства утверждения о соотношении между углами треугольника и противолежащими сторонами можно предложить учащимся самостоятельно разобрать решение задачи 17 по тексту учебника и ответить на следующий вопрос:

> Докажите, что против наименьшей стороны треугольника лежит острый угол.

На прямое применение утверждения о соотношении между углами треугольника и противолежащими сторонами можно предложить устно решить задачу.

> Стороны треугольника равны 8 см; 9 см и 12 см. Определите, против какой стороны лежит: 1) наибольший угол треугольника; 2) наименьший угол треугольника.

В учебнике приведена задача 18, которая аналогична приведенной выше, поэтому решать ее или пропустить, решать учителю.

Полезно напомнить учащимся свойство равнобедренных треугольников: в равнобедренном треугольнике против равных углов лежат равные стороны, и наоборот, против равных сторон лежат равные углы. Это свойство равнобедренных треугольников поможет при устном решении задач:

Определите вид угла A при вершине равнобедренного треугольника, если его основание меньше боковой стороны.

Определите, что больше, боковая сторона или основание равнобедренного треугольника, если один из его углов – тупой.

При решении следующей задачи полезно обсудить вопрос: можно определить вид треугольника, не используя утверждения о соотношении между углами треугольника и противолежащими сторонами. (*Да, можно, применяя теорему косинусов (результат решения задачи 3), но тогда надо проверить соотношения между сторонами треугольника для каждой стороны. А применяя утверждение о соотношении между углами треугольника и противолежащими сторонами, достаточно проверить соотношение только для большей стороны треугольника.*)

Определите вид треугольника, не вычисляя его углов, если его стороны равны:

1. $a = 7$ см; $b = 8$ см; $c = 12$ см; 2. $a = 0{,}3$ см; $b = 0{,}4$ см; $c = 0{,}5$ см;

3. $a = 8$ см; $b = 14$ см; $c = 12$ см.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку утверждения о соотношении между углами треугольника и противолежащими сторонами, *сделать рисунок, иллюстрирующий формулировку* утверждения, *и краткую запись условия и заключения прямого и обратного утверждения. На непосредственное применение данного утверждения решить задачу 73 (эта задача приведена выше). Задача 74 (задача 18 из учебника). При решении задач 75–77 происходит повторение свойств равнобедренного треугольника. В тетради задача 25 из учебника дана под номером 82. Ее решение является обобщением решения задач 79–81.*

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пункта 112; решить задачи 17, 18 и 21; дома – вопрос 4 из § 12, задачи 19, 20 и 22.

На втором уроке в классе провести самостоятельную работу, решить задачи 10 (для средней стороны), 11 и 25; дома – решить задачи: 9 (для меньшей стороны), 23 и 24. Повторить решение прямоугольных треугольников (вопрос 10, § 7, 8-й класс) и построение треугольников (вопросы 10–14, § 5, 7-й класс).

Самостоятельная работа по теме «Теорема косинусов. Теорема синусов. Соотношение между углами треугольника и противолежащими сторонами»

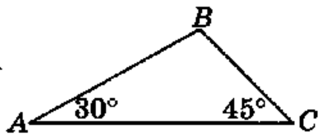
Самостоятельная работа содержит четыре задачи: первая – с выбором ответа, три другие – со свободным ответом.

1-й вариант

1. Определите вид треугольника, не вычисляя его углов, если его стороны равны 8 см, 14 см и 6 см:

   1) остроугольный;
   2) прямоугольный;
   3) тупоугольный;
   4) такой треугольник не существует.

2. В треугольнике ABC углы, прилежащие к стороне AC, равны 30° и 45°. Найдите сторону AB, если сторона BC равна $5\sqrt{2}$ см.



Ответ: ____________________

3. Угол, образованный хордой и радиусом окружности, равен 72°. Определите, что больше: хорда или радиус окружности.

Ответ: ____________________

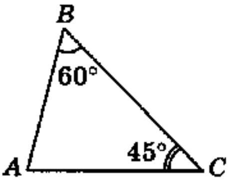
4. Найдите острый угол между диагоналями параллелограмма, если его большая сторона равна $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см, а диагонали равны $\sqrt{3}$ см и 1 см.

Ответ: ____________________

2-й вариант

1. Определите вид треугольника, не вычисляя его углов, если его стороны равны 7 см, 8 см и 12 см:

1) остроугольный;
2) прямоугольный;
3) тупоугольный.



2. В треугольнике *ABC* сторона *AC* равна 8 см, один из углов, прилежащих к этой стороне, равен 45°, а угол, противолежащий ей, равен 60°. Найдите сторону, противоположную углу в 45°.

Ответ: 1. $4\sqrt{6}$ см; 2. $8\sqrt{6}$ см; 3. $8\sqrt{\frac{2}{3}}$ см; 4. $4\sqrt{\frac{2}{3}}$ см.

3. В окружности проведена хорда *AB*. Центральный угол, опирающийся на дугу, стягиваемую хордой *AB*, меньше 60°. Определите, что больше: хорда *AB* или радиус окружности.

Ответ: ______________________________

4. Найдите меньший угол параллелограмма, если его стороны равны 1 и $\sqrt{3}$, а одна из диагоналей равна $\sqrt{7}$.

Ответ: ______________________________

Указания к задачам

Задачи **21**, **22** и **23** рекомендуется решить устно по готовому чертежу или выполняя чертеж на доске по условию задачи.

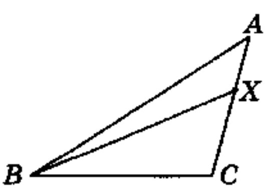


Рис. 49

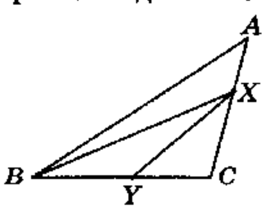


Рис. 50

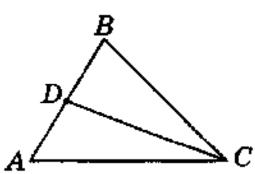


Рис. 51

21. В ΔABC (рис. 49) $\angle ACB > 90°$, $\angle BXA$ – тупой (внешний угол треугольника BXC, значит, больше любого внутреннего, не смежного с ним, то есть $\angle BXA > \angle ABC$). Значит, $\angle BAX$ – острый. Таким образом, $\angle BAX < \angle BXA$, следовательно, $BX < AB$.

22. В ΔABC (рис. 50) $\angle ACB > 90^\circ$, $\angle XYB$ – внешний по отношению к ΔCXY, значит, $\angle XYB > \angle BCA$, т. е. $\angle XYB$ – тупой, откуда следует, что $\angle XBY$ острый. Таким образом, $\angle XBY < \angle XYB$, значит, $XY < XB$; но $XB < AB$ (см. предыдущую задачу), $XY < AB$.

23. Углы с общей вершиной в точке D (рис. 51) либо оба прямые, либо один из них тупой. В первом случае $CD < AC$ и $CD < BC$, так как стороны AC и BC являются гипотенузами в треугольниках ADC и BDC соответственно. Во втором – CD заведомо меньше стороны, противолежащей тупому углу.

24. Решение. Способ 1 использует теорему синусов. В треугольнике BCD (рис. 52):

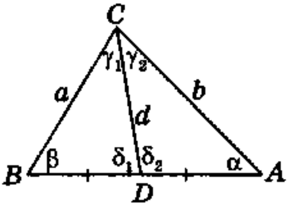


Рис. 52

$$\frac{\frac{c}{2}}{\sin\gamma_1} = \frac{a}{\sin\delta_1}.$$ В треугольнике ACD:

$$\frac{\frac{c}{2}}{\sin\gamma_2} = \frac{b}{\sin\delta_2} = \frac{b}{\sin(180^\circ - \delta_1)} = \frac{b}{\sin\delta_1},$$

так как углы δ_1 и δ_2 – смежные, значит, $\sin\delta_2 = \sin(180^\circ - \delta_1) = \sin\delta_1$.

По условию $AC > BC$, то есть $b > a$, значит, $\frac{b}{\sin\delta_1} > \frac{a}{\sin\delta_1}$,

отсюда $\frac{\frac{c}{2}}{\sin\gamma_2} > \frac{\frac{c}{2}}{\sin\gamma_1}$, $\frac{1}{\sin\gamma_2} > \frac{1}{\sin\gamma_1}$, следовательно, $\sin\gamma_2 < \sin\gamma_1$ и $\gamma_1 > \gamma_2$. Значит, $\angle BCD > \angle ACD$.

Способ 2.

Достроим треугольник ABC (рис. 53) до параллелограмма $ACBE$ с диагональю AB (на продолжении отрезка CD отложим отрезок DE, равный DC; соединим точку E с точками A и B).

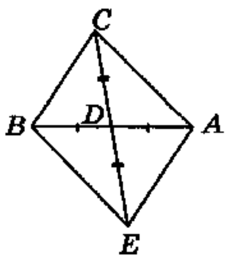


Рис. 53

В ΔABC: $AC > BC$ по условию. Рассмотрим ΔCAE:

1. $AC > AE$ ($AE = BC$ по построению, так как $ABCE$ – параллелограмм).

2. $\angle AEC > \angle ACE$ (против большей стороны лежит больший угол).

3. $\angle AEC = \angle BCE$ (внутренние накрест лежащие).

4. $\angle BCE > \angle ACE$ (следует из 2 и 3).

Следовательно, $\angle BCD > \angle ACD$.

25. Пусть h, m и l соответственно высота, медиана и биссектриса треугольника ABC, проведенные из вершины B. Докажем, что $h \le l \le m$. Рассмотрим два случая:

1) $AB = BC$; 2) $AB \ne BC$.

1) Если $AB = BC$, то треугольник ABC равнобедренный и, следовательно, $h = l = m$.

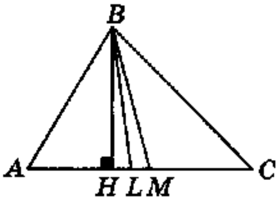


Рис. 54

2) Если $AB \ne BC$, то высота h меньше медианы m и меньше биссектрисы l (перпендикуляр меньше наклонной, проведенной из той же точки). Докажем, что $l < m$. Пусть для определенности $AB < BC$; проведем медиану BM и биссектрису BL (рис. 54).

Докажем, что точка M лежит между точками L и C. Согласно утверждению об отношении отрезков стороны, на которые ее делит биссектриса противолежащего угла, пропорциональны прилежащим сторонам: $\frac{AL}{AB} = \frac{CL}{CB}$. Отсюда $AL < CL$. Значит, точка M лежит между точками L и C.

Докажем теперь, что $BL < BM$. Рассмотрим треугольники ABL и CBM. Имеем $\angle A > \angle C$, так как $BC > AB$; $\angle ABL = \angle CBL$, так как BL – биссектриса; значит, $\angle BLA < \angle BLC$, а так как углы BLA и BLC – смежные, то $\angle BLC > 90^\circ$. В треугольнике BLM $\angle BLM$ – тупой, значит, $BM > BL$ ($l < m$).

Объединив результаты первого и второго случаев, получаем $h \le l \le m$, что и требовалось доказать.

Дополнительные задачи

1. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Докажите, что если $BC > AB$, то $\angle BDC$ – тупой.
2. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD. Докажите, что если $\angle BDC$ – тупой, то середина стороны AC принадлежит лучу DC.
3. Докажите, что биссектриса треугольника не больше его медианы, проведенной из той же вершины.

Решение треугольников

Комментарий для учителя

Решение произвольных треугольников, рассматриваемое в этом пункте, естественно связать с решением прямоугольных треугольников, изучавшимся в VIII классе, и построением треугольников, изучавшимся в VII классе. При этом полезно отметить, что теорема косинусов и теорема синусов являются соответственно обобщениями теоремы Пифагора и соотношений между сторонами и синусами углов прямоугольного треугольника. Поэтому теоремы косинусов и синусов и утверждение о соотношении между углами треугольника и противолежащими сторонами позволяют решать любые треугольники по заданным трем элементам, их определяющим.

Рассматриваются четыре типа задач на решение треугольников:

1) по данной стороне и двум углам;

2) по двум сторонам и углу между ними;

3) по трем сторонам;

4) по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них.

Задача 4) «по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них» является задачей повышенной трудности.

Текущие результаты изучения пункта 113. Учащиеся должны научиться:

– *иллюстрировать* и *объяснять* решение трех основных задач в общем виде;

– *применять* при решении задач на вычисления длин и углов треугольников и доказательство:

- теорему косинусов;
- теорему синусов;
- утверждение о соотношении между углами треугольника и противолежащими сторонами;
- определения и свойства тригонометрических функций и тригонометрические тождества;
- алгебраический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Задачи на решение треугольников, которые полезно сначала рассмотреть в общем виде, довольно часто являются фрагментами решения более содержательных и интересных задач. Поэтому умение решать эти задачи является требованием ФГОС[1] к знаниям учащихся.

Перед рассмотрением темы *«Решение треугольников»* следует задать на дом для повторения: решение прямоугольных треугольников (8-й класс, § 7, вопрос 10) и построение треугольников (7-й класс, § 5, вопросы 10–14). На уроке следует рассмотреть задачи на построение, решение прямоугольных треугольников в ходе решения задач 1–5 из дополнительных задач. Подводя итоги повторения, полезно обратить внимание учащихся на то, что равенство треугольников определяется тремя равными элементами, взятыми в определенной конфигурации; построить треугольник также можно по трем заданным элементам.

> *При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся решить задачи 83–87, которые совпадают с задачами 1–5 из дополнительных задач.*

Теперь попробуем выяснить, можно ли по трем данным элементам треугольника найти остальные элементы треугольника, т. е. решить треугольник.

Рассмотрение задач на решение треугольников естественнее провести в том же порядке, как рассматривались признаки равенства треугольников:

Задача I. *Найти все элементы треугольника по двум сторонам и углу между ними.*

Задача II. *Найти все элементы треугольника по стороне и двум углам.*

Задача III. *Найти все элементы треугольника по трем сторонам.*

Задача IV. *Найти все элементы треугольника по двум сторонам и углу, лежащему против одной из них.*

[1] ФГОС – Федеральный государственный образовательный стандарт.

Задача V. Рассматривается последней, она более трудная и менее знакома учащимся.

Рассмотрение задач на решение треугольников целесообразно проводить с использованием заранее подготовленных плакатов (рис. 55 и 56).

2°. Задача I. *Найти все элементы треугольника по двум сторонам и углу между ними.*

Приступая к решению задачи, следует заметить, что любые два треугольника с равными двумя сторонами и равными углами между ними будут равны по первому признаку равенства треугольников. А это означает, что при решении треугольника по двум данным сторонам и углу между ними значения для третьей стороны и остальных двух углов имеют единственные значения, т.е. решение единственное.

При рассмотрении задачи полезно обратить внимание учащихся на два возможных способа нахождения углов треугольника. В то время как длина стороны c однозначно определяется с помощью теоремы косинусов, для определения углов треугольника можно применить и теорему косинусов (I способ), и теорему синусов (II способ). Оба способа обладают рядом достоинств и недостатков. Заметим, что при использовании первого способа угол определяется однозначно по знаку косинуса, но вычисления получаются весьма громоздкими. При использовании второго способа теорема синусов дает возможность довольно просто вычислить синус любого из этих углов. Однако значение синуса определяют два угла – острый и тупой. Следовательно, необходимо воспользоваться утверждением о соотношении сторон и углов треугольника.

Разберем возможные случаи:

1. Если сторона c – наибольшая, то углы α и β – острые.
2. Если сторона c – не наибольшая, то сначала находим угол, лежащий против меньшей из сторон a и b, и, следовательно, является острым. Третий угол находится из равенства $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

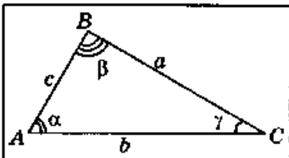
<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td colspan="3">Дан треугольник ABC. Обозначим его стороны и углы:
$BC = a, \quad AC = b, \quad AB = c.$
$\angle BAC = \alpha, \ \angle ABC = \beta, \ \angle BCA = \gamma.$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Решение треугольника:</td></tr>
<tr><td colspan="2">По двум сторонам и углу между ними</td><td>По стороне и прилежащим к ней углам</td><td colspan="2">По трем сторонам</td></tr>
<tr><td colspan="2">Дано: a, b, γ.
Найти: c, α, β.</td><td>Дано: a, β, γ.
Найти: b, c, α.</td><td colspan="2">Дано: a, b, c.
Найти: α, β, γ.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$, $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$</td><td rowspan="3">$\alpha = 180^\circ - (\beta + \gamma)$,
$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$,
$b = \dfrac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$;
$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$,
$c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$.</td><td colspan="2">Пусть a − наибольшая сторона,
$a < b + c$.
$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha$.
$\cos\alpha = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}$</td></tr>
<tr><td>I способ
$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb\cos\alpha$.
$\cos\alpha = \dfrac{c^2 + b^2 - a^2}{2cb}$</td><td>II способ
1) Если $\angle\gamma > 90^\circ$, $\angle\alpha$ и $\angle\beta$ − острые.
2) Если $\angle\gamma < 90^\circ$, и $a < b$, $\angle\alpha$ − острый.
$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$;
$\sin\alpha = \dfrac{a\sin\gamma}{c}$</td><td>I способ
$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac\cos\beta$,
$\cos\beta = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$</td><td>II способ
$\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$,
$\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">По полученным значениям тригонометрических функций угла α определяется угол α.
$\beta = 180^\circ - (\alpha + \gamma)$.</td><td colspan="2">По полученным значениям тригонометрических функций угла β определяется угол β.
$\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.</td></tr>
</table>

Рис. 55

После рассмотрения в общем виде решения треугольника по двум сторонам и углу между ними полезно разобрать по тексту учебника задачу 27 1).

В рабочей тетради даны таблицы такие же, как и приведенные выше. Использование в данной теме рабочей тетради позволяет сэкономить время учителя при подготовке к уроку, а также время на самом уроке. При этом у учащихся будет конспект урока, который, несомненно, поможет усвоению данной темы и систематизации знаний учащихся по данной теме. При рассмотрении решения задачи на решение треугольников по двум сторонам и углу между ними следует воспользоваться таблицей, приведенной в тетради. После рассмотрения задачи полезно решить задачу 88, аналогичную задаче 27 4) из учебника.

3°. Задача II. *Найти все элементы треугольника по стороне и двум углам.*

С этой задачей учащиеся фактически уже имели дело при изучении теоремы синусов. Полезно обратить внимание на то, что любые два треугольника, построенные по этим данным, будут равны по второму признаку, т. е. решение единственное.

Приступая к решению задачи, следует заметить, что любые два треугольника с равными сторонами и равными углами, прилежащими к равным сторонам, будут равны по второму признаку равенства треугольников. А это означает, что при решении треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам значения для двух других сторон и третьего угла имеют единственные значения, т.е. решение единственное.

После рассмотрения в общем виде решения треугольника по двум сторонам и углу между ними полезно разобрать по тексту учебника задачу 26 1).

В рабочей тетради при рассмотрении решения задачи на решение треугольников по стороне и двум углам следует воспользоваться таблицей, приведенной в тетради. После рассмотрения задачи полезно решить задачу 89, аналогичную задаче 26 5) из учебника.

4°. Задача III. *Найти все элементы треугольника по трем сторонам.*

При рассмотрении этой задачи, как и в случае задачи I, полезно обратить внимание учащихся на два возможных способа нахождения углов треугольника. В то время как градусная мера наибольшего угла однозначно определяется с помощью теоремы косинусов, для определения одного из двух других углов треугольника можно применить и теорему косинусов (I способ), и теорему синусов (II способ). Поскольку сначала определяется наибольший угол, то два других будут заведомо острыми. Третий угол находится из равенства $\alpha + \beta + \gamma = 180°$. Следует заметить, что, как и задачи I и II, задача нахождения углов треугольника по трем данным сторонам имеет единственное решение в силу третьего признака равенства треугольников.

Приступая к решению задачи, следует заметить, что любые два треугольника с равными тремя сторонами будут равны по третьему признаку равенства треугольников. А это означает, что при решении треугольника по трем данным сторонам значения для всех трех углов имеют единственные значения, т.е. решение единственное. Следует заметить, что при решении треугольника по трем сторонам необходимо обязательно проверить, удовлетворяет ли данная тройка длин сторон треугольника неравенству треугольника. Для этого можно предложить учащимся решить задачу 6 из дополнительных задач.

После рассмотрения в общем виде решения треугольника по трем сторонам полезно разобрать по тексту учебника задачу 29 1).

В рабочей тетради при рассмотрении решения задачи на решение треугольников по трем сторонам следует воспользоваться таблицей, приведенной в тетради. После рассмотрения задачи полезно решить задачу 90, аналогичную задаче 29 3) из учебника.

5°. Рассмотрим более сложный пример решения треугольников.

Задача IV. *Найти все элементы треугольника по двум сторонам и углу, лежащему против одной из них.*

Рассмотрение задачи целесообразно проводить с использованием заранее подготовленного плаката (рис. 56), из которого видно, в каком случае задача имеет два решения, одно решение, а в каком случае решения нет.

1-й случай: если $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a} > 1$ $(b\cdot\sin\alpha > a)$, то решения нет.

2-й случай: если $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a} = 1$ $(b\cdot\sin\alpha = a)$, то $\beta = 90°$; решение единственное.

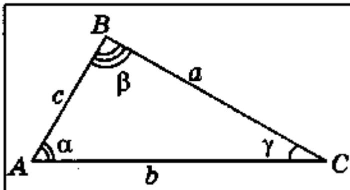
$$\gamma = 90° - \alpha,\ c = b\cdot\cos\alpha.$$

3-й случай: если $\sin\beta = \dfrac{b\sin\alpha}{a} < 1$ $(b\cdot\sin\alpha < a)$ и:

1) $b = a$, то решение единственное и $\angle\beta$ – острый, так как углы при основании равнобедренного треугольника могут быть только острыми.

2) $b < a$, то решение единственное – $\angle\beta$ может быть только острым, так как против большей стороны лежит больший угол, то $\alpha \geq \beta$,

3) $b > a$, то задача имеет два решения: существуют два угла β_1 и β_2 (острый и тупой), синусы которых равны.



По двум сторонам и углу, лежащему против одной из них.

Дано: a, b, α.
Найти: c, γ, β.

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}\text{, значит, } \sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$$

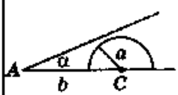
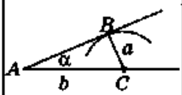
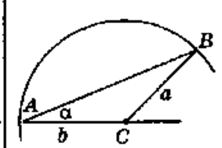
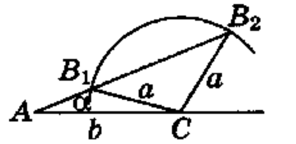
$\sin\beta > 1$	$\sin\beta = 1$	$0 < \sin\beta < 1$	
			
		$a \geq b$	$a < b$
	$\beta = 90°$	$\alpha \geq \beta$, значит, $\angle\beta$ – острый.	Существуют два угла β_1 – острый и β_2 – тупой $(180° - \beta_1)$
	$\gamma = 90° - \alpha$ $c = b \cdot \cos\alpha$	$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$. $c = \dfrac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$	$\gamma_1 = 180° - (\alpha + \beta_1)$ $c_1 = \dfrac{a\sin\gamma_1}{\sin\alpha}$ $\gamma_2 = 180° - (\alpha + \beta_2)$ $c_2 = \dfrac{a\sin\gamma_2}{\sin\alpha}$
Нет решения	Одно решение	Одно решение	Два решения

Рис. 56

Можно решить задачу IV иначе. С помощью теоремы косинусов найти наибольший угол; воспользовавшись теоремой синусов, найти любой другой угол (он заведомо будет острым); третий угол находится из равенства $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

После рассмотрения в общем виде решения треугольника по двум сторонам и углу, лежащему против одной из них, полезно разобрать по тексту учебника задачу 28 5).

В рабочей тетради при рассмотрении решения задачи на решение треугольников по двум сторонам и углу, противолежащему одной из данных сторон, следует воспользоваться таблицей, приведенной в тетради. После рассмотрения задачи полезно решить задачу 91, аналогичную задаче 28 4) из учебника.

6°. Умение пользоваться таблицами или микрокалькуляторами для нахождения тригонометрических функций угла и наоборот нахождения угла по заданной одной из его тригонометрических функций не является программным. Поэтому если в условии задачи на решение треугольников требуется найти угол, то вполне достаточно определить одну из его тригонометрических функций.

Однако, если учитель сочтет полезным, можно объяснить учащимся, как пользоваться таблицами или микрокалькуляторами. Для углов, равных 30°, 45°, 60°, 90°, 135° и 150°, значения тригонометрических функций учащиеся должны знать наизусть.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе повторить решение прямоугольных треугольников и построение треугольников, рассмотреть решение треугольника по двум сторонам и углу между ними в общем виде; разобрать по тексту учебника задачу 27 1) из пункта 113; решить задачу 27 4); дома – решить задачи 27 3), 5) и 6).

На втором уроке в классе рассмотреть решение треугольника: 1. по стороне и прилежащим к ней углам, 2. по трем сторонам в общем виде; разобрать по тексту учебника задачи 26 1) и 29 1) из пункта 113; решить задачи 26 5) и 29 3); дома – решить задачи 26 3) и 29 4), 5).

На третьем уроке: в классе рассмотреть решение треугольника по двум сторонам и углу, лежащему против одной из них в общем виде; разобрать по тексту учебника задачу 28 5) из пункта 113; решить задачу 28 2) и 4); дома – решить задачи 26 4), 28 3) и 29 6).

Дополнительные задачи

1. Постройте треугольник по двум сторонам и радиусу описанной окружности.

2. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и углу, противоположному основанию.

3. Радиус окружности равен 5 см. Из точки, удаленной от центра окружности на 13 см, проведены касательная и секущая, проходящая через центр окружности. Найдите длину касательной.

4. Упростите выражение $\dfrac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

5. Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}6$.

6. В треугольнике даны три стороны: $a = 4$ см, $b = 5$ см и $c = 12$ см. Найдите его углы.

7. В треугольнике даны сторона a и углы α и γ. Найдите радиус вписанной окружности r.

8. Докажите, что в любом треугольнике выполняется отношение $\dfrac{R}{r} \geq 2$, где R – радиус описанной окружности, r – радиус вписанной окружности.

9. Докажите: в параллелограмме $ABCD$ выполняется отношение $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BD^2)$.

Систематизация и обобщение знаний по теме «Решенне треугольников»

Комментарий для учителя

1°. В результате систематизации и обобщения знаний по теме «Решение треугольников» учащиеся должны:

– *выделять* на чертеже, данном в условии задачи, конфигурации, необходимые для решения треугольников;

– *решать* треугольники в общем виде;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- теоремы косинусов и синусов, соотношения между углами и сторонами треугольника;
- определения и свойства тригонометрических функций и тригонометрические тождества;
- алгебраический аппарат.

2°. Подготовку к контрольной работе по теме «Решение треугольников» полезно организовать как урок решения задачи. Для этого можно использовать нерешенные задачи из § 7 и § 12 из учебника, в ходе решения которых провести повторение. Кроме того, можно подобрать задачи из разделов «Дополнительные задачи» в зависимости от уровня подготовки класса. Особенно полезно решить задачи 7–9 из дополнительных задач к пункту 113.

В сборнике тестов Т.М. Мищенко «Геометрия. Тесты. 9 класс» к учебнику А.В. Погорелова издательства «Просвещение» для § 12 «Решение треугольников» рекомендованы тесты 5 и 6, направленные на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении этой темы. Каждый тест имеет четыре варианта.

Повторение можно организовать несколькими способами.

Первый способ: итоговый тест по теме можно создать из тестов 5 и 6, используя часть заданий из каждого теста. Следует заметить, что в зависимости от уровня класса можно использовать и более легкие задания тестов или более сложные. Кроме того, полезно разобрать хотя бы одну из десяти задач теста 6, решение которых требует знания и понимания применения признаков подобия треугольников.

Второй способ: поскольку тесты не предполагают письменного оформления каждого задания, то можно из каждого теста выполнить по одному варианту устно.

Первый способ более приемлемый, так как при разборе заданий позволяет более глубоко и всесторонне систематизировать пройденный материал. Разобрать решения заданий следует сразу после выполнения тестов с активным привлечением учащихся.

При использовании в учебном процессе рабочей тетради ее можно использовать как конспект темы и просмотреть решение опорных задач. Поскольку в рабочей тетради по каждому пункту темы дано избыточное число задач, то из не решенных в процессе изучения темы задач можно сделать подборку для урока повторения. Если позволяет уровень класса, полезно решить задачи 93–95.

3°. Контрольная работа рассчитана на один урок (45 минут). В контрольной работе первые четыре задачи – это задачи с выбором ответа и со свободным ответом. Надо напомнить учащимся, что делать запись решения этих задач не следует. Такую запись можно делать на черновиках, но их сдавать на проверку не надо. В задачах 5 и 6 решение записывается полностью с краткой записью условия и выполнением чертежа.

4°. На последнем уроке данной темы на дом следует задать повторение материала, используемого при доказательстве теоремы о длине ломаной, а именно теорему о неравенстве треугольника (пункт **66** **§ 7**).

Контрольная работа по теме «Решение треугольников»

1-й вариант

1. В треугольнике ABC проведена медиана BM. Определите, какая из его сторон – AB или BC – больше, если $\angle BMA = 80°$.

Ответ: 1. $AB = BC$; 2. $BC < AB$; 3. $BC > AB$; 4. Определить невозможно.

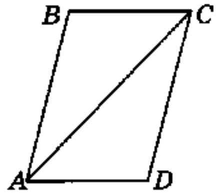
2. Треугольник вписан в окружность радиуса 4 см. Найдите наибольшую сторону треугольника, если центр описанной окружности лежит на стороне треугольника.

Ответ: ______________________

3. В равнобедренном треугольнике один из углов тупой, одна из сторон имеет длину 15 см, а другая – 10 см. Определите длину основания этого треугольника.

Ответ: ______________________

4. Диагональ параллелограмма делит его угол на части, равные 45° и 30°. Найдите отношение большей стороны параллелограмма к его меньшей стороне.



Ответ: ____________________

5. Найдите острый угол между диагоналями параллелограмма, если его большая сторона равна $\frac{\sqrt{7}}{2}$ см, а диагонали равны $\sqrt{3}$ см и 1 см.

6. В треугольнике со сторонами 4 см, 5 см и 8 см найдите длину медианы, проведенной из вершины большего угла.

2-й вариант

1. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Определите, какая из его сторон – BC или CD – меньше, если угол AOB – острый.

Ответ: 1. $AB = BC$; 2. $BC < AB$; 3. $BC > AB$; 4. Определить невозможно.

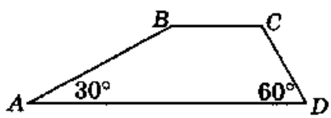
2. Периметр равнобедренного треугольника равен 22, а длина одной из его сторон равна 10. Найдите длину боковой стороны, если центр описанной окружности лежит вне треугольника.

Ответ: ____________________

3. Длины двух сторон равнобедренного треугольника равны соответственно 6 и 2. Определите длину третьей стороны этого треугольника.

Ответ: ____________________

4. Углы при основании AD трапеции равны 60° и 30°. Найдите отношение сторон AB и CD.



Ответ: ____________________

5. Найдите меньший угол параллелограмма, если его стороны равны 1 и $\sqrt{3}$, а одна из диагоналей равна $\sqrt{7}$.

6. Две стороны треугольника имеют длины 10 см и 6 см, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 7 см. Найдите угол между данными сторонами треугольника.

§ 13. МНОГОУГОЛЬНИКИ

В параграфе развивается начатая еще при изучении треугольников и четырехугольников одна из важных содержательных линий школьного курса геометрии – линия многоугольников. Особое внимание уделяется изучению свойств выпуклых многоугольников, а среди них – правильных многоугольников. Изучение свойств правильных многоугольников, вписанных в окружность и описанных около окружности, и их периметров позволяет подвести учащихся к понятию длины окружности и площади круга, а также выводу формул для их вычисления. Для правильных n-угольников доказывается существование описанной и вписанной окружностей. При выводе формулы длины окружности в неявном виде используется метод предельного перехода. Привлечение в связи с этим наглядно-интуитивных представлений учащихся не противоречит авторскому подходу к построению курса и способствует лучшему пониманию вывода формул длины окружности и площади круга.

Здесь же учащимся предстоит познакомиться с новой для них мерой углов – радианной, определение которой дано конструктивно. Учащиеся должны понять соотношение между градусной и радианной мерами угла.

Планируемые итоговые результаты изучения § 13.

Учащиеся должны научиться:

– *изображать* ломаную и ее элементы;

– *формулировать*, *иллюстрировать* и *доказывать* теорему о длине ломаной;

– *формулировать* и *иллюстрировать* определения многоугольника, выпуклого многоугольника и правильного многоугольника;

– *формулировать*, *иллюстрировать* и *доказывать* теорему о сумме углов выпуклого n-угольника;

– *объяснять* свойство выпуклого правильного многоугольника быть вписанным в окружность и описанным около окружности;

– *формулировать*, *иллюстрировать* и *доказывать* теоремы о свойствах вписанных в окружность и описанных около окружности четырехугольниках;

– *объяснять* расположение центров вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника, понятие центра многоугольника;

– *выводить* формулы, связывающие радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности со стороной правильного n-угольника; формулы длины окружности и длины дуги окружности;

– *объяснять* понятие длины окружности, опираясь на наглядные представления;

– *вычислять* длину окружности, длину дуги окружности;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- формулу о сумме углов выпуклого n-угольника;
- формулы, связывающие радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности со стороной правильного n-угольника;
- формулы длины окружности и длины дуги окружности;
- алгебраический аппарат.

Учащиеся получат возможность научиться:

– объяснять соотношение между градусной и радианной мерами угла;

– выводить формулы перехода от градусной меры угла к радианной и обратно;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- *формулы перехода от градусной меры угла к радианной и обратно.*

Ломаная

Комментарий для учителя

1. Основное содержание этого пункта составляют определение ломаной и теорема о длине ломаной. При этом следует обратить внимание учащихся на то, что теорема о длине ломаной является обобщением неравенства треугольника, изучавшегося в VIII классе (пункт 66 § 7).

Текущие результаты изучения пункта 114. Учащиеся должны:

– *изображать* ломаную и ее элементы;

– *формулировать, иллюстрировать* и *доказывать* теорему о длине ломаной;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство теорему о длине ломаной.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Понятие *ломаной* и ее элементов вводится конструктивно с опорой на рисунок, определяются вершины, звенья и концы ломаной.

Понятия простой ломаной и ломаной с самопересечениями вводятся наглядно по рисунку 275 а) и б) учебника.

На формирование понятия *ломаной* и ее элементов полезно выполнить устно по готовому чертежу (рис. 57) следующее упражнение:

1. Назовите вершины ломаной, изображенной на рисунке 57.

2. Назовите звенья ломаной, изображенной на рисунке 57.

На формированне понятия простой ломаной можно выполнить устно по готовому чертежу (рис. 58) следующее упражнение:

Определите на рисунке 58 *простые* ломаные и назовите их номера.

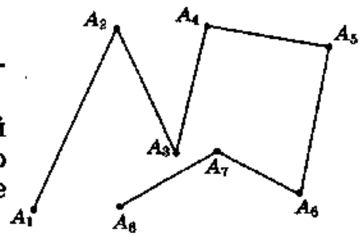


Рис. 57

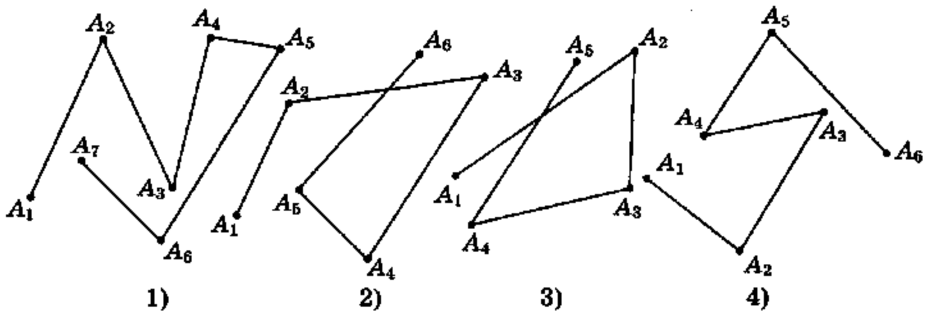


Рис. 58

В рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку определения ломаной. *На формирование понятия* ломаной *и ее элементов, а также понятия* простой ломаной *рекомендуется выполнить устно по готовому чертежу упражнения 96 и 97. Использование в процессе обучения рабочей тетради позволяет сэкономить время учителя при подготовке к уроку, а также время на самом уроке. При этом у учащихся будет конспект урока, который, несомненно, поможет при выполнении домашнего задания.*

2°. После введения определения *длины ломаной* предлагается устно по готовому чертежу выполнить следующее упражнение.

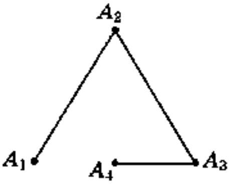


Рис. 59

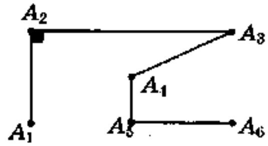


Рис. 60

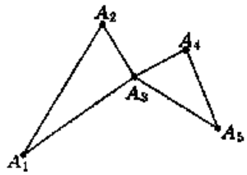


Рис. 61

1. Найдите длину ломаной $A_1A_2A_3A_4$ (рис. 59), где A_1, A_2, A_3 – вершины равностороннего треугольника со стороной, равной 6 см, а A_4 – середина стороны A_1A_3.

2. Найдите длину ломаной $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ (рис. 60), где точки A_1, A_2, A_3 и A_6 – вершины прямоугольника, A_4 – точка пересечения его диагоналей, A_5 – середина отрезка A_1A_6, если отрезки A_1A_2 и A_2A_3 соответственно равны 6 см и 8 см.

В рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку определения длины ломаной. *На формирование понятия* длины ломаной *рекомендуется выполнить упражнения 98 и 99.*

3°. Перед началом объяснения теоремы о длине ломаной полезно решить задачу.

Докажите, что длина ломаной $A_1A_2A_3A_4A_5$ (рис. 61) больше длины ломаной $A_1A_3A_5$.

Сформулировав теорему о длине ломаной, следует обратить внимание учащихся на то, что она является обобщением неравенства треугольника. Доказательство теоремы проводится с опорой на рисунок 276 из учебника. Поскольку доказательство теоремы достаточно простое, то следует активно привлекать учащихся к участию в доказательстве.

После доказательства теоремы о длине ломаной полезно привести пример простой ломаной, все вершины которой лежат на одной прямой, и пояснить, что именно в этом случае длина ломаной равна длине отрезка, соединяющего его концы.

На формирование умения применять теорему о длине ломаной можно предложить учащимся выполнить задачи 1–3 из дополнительных задач методического пособия.

В рабочей тетради следует предложить учащимся решить задачу 100, которая является аналогом задачи, приведенной выше. Затем записать формулировку теоремы о длине ломаной. На формирование умения применять теорему о длине ломаной рекомендуются задачи 101–103 (задачи 1–3 из дополнительных задач методического пособия).

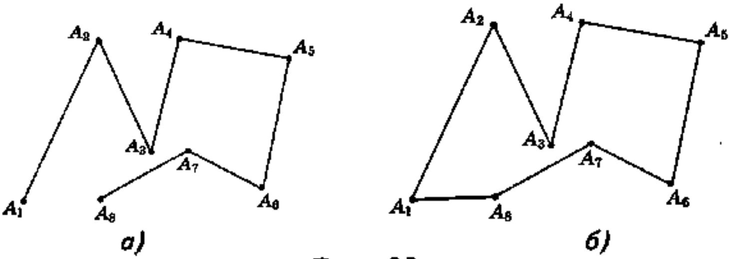


Рис. 62

4°. На этом же уроке целесообразно познакомить учащихся с понятием *«замкнутая ломаная»*. Понятие *«замкнутая ломаная»* является вспомогательным для введения понятия *«многоугольник»*. Введение этого понятия полезно сопроводить рисунком 62 а) и б), на котором к ломаной $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ (рис. 62 а) добавляется отрезок A_1A_8, соединяющий ее концы (рис. 62 б). Перенесение в этот пункт понятия замкнутой ломаной из пункта 114 позволяет решить задачи 4–6 из учебника, непосредственно направленные на отработку теоремы о длине ломаной.

Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пункта 114, ввести понятие «замкнутая ломаная» из пункта 115; разобрать решение задачи 1 по тексту учебника; решить задачи 3 и 4; дома – вопросы 1 и 2 из § 15, вопрос 11 из § 4, задачи 5, 6 и 7 (устно).

Указания к задачам

1. Рассмотрим ломаную XO_1O_2Y (рис. 63).
$XY \le YO_2 + O_1O_2 + O_1X$ в силу теоремы о длине ломаной $XY \le R_1 + d + R_2$. Тогда $AC = R_1 + d + R_2$ – наибольшее расстояние между точками окружности.

2. Рассмотрим ломаную XYO_2O_1 (см. рис. 63).
$O_1X \le XY + YO_2 + O_1O_2$ в силу теоремы о длине ломаной $R_1 \le XY + R_2 + d$. Тогда $XY \ge R_1 - R_2 - d$.

Так как $CD = R_1 - R_2 - d$, то наименьшее расстояние между точками окружности равно $R_1 - R_2 - d$, в этом случае точки X и Y занимают положение точек D и C.

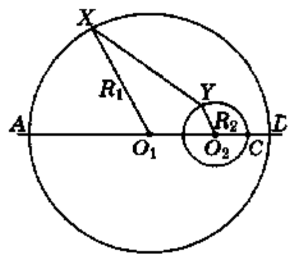


Рис. 63

Дополнительные задачи

1. У ломаной $A_1A_2A_3A_4$: $A_1A_2 = 3$ см, $A_2A_3 = 4$ см, $A_3A_4 = 2$ см. Может ли длина отрезка A_1A_4 быть равной: а) 7 см; б) 10 см?

2. Докажите, что большее основание трапеции меньше суммы длин остальных сторон.

3. Определите, существует ли четырехугольник со сторонами, равными 13 см, 24 см, 42 см и 79 см.

4. На сторонах треугольника ABC взяты точки P, Q и R (по одной на каждой стороне). Докажите, что периметр треугольника PQR меньше периметра треугольника ABC.

5*. Расстояния от точки A до точек B и C равны 3 см и 14 см соответственно, а расстояния от точки D до точек B и C равны 5 см и 6 см соответственно. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной прямой.

Выпуклые многоугольники

Комментарий для учителя

Понятие *многоугольника* вводится в конце изучения курса планиметрии, когда у учащихся накоплены знания о треугольниках и четырехугольниках, и поэтому его введение является обобщением знаний учащихся об известных им понятиях треугольника и четырехугольника. Поэтому терминология, связанная с описанием фигуры (вершины, стороны, диагонали многоугольника, периметр многоугольника, внутренние и внешние углы выпуклого многоугольника), воспринимается ими как хорошо знакомая. Также не требует значительных затрат времени и изучение отношения подобия между многоугольниками.

После введения понятия выпуклых многоугольника, а вернее его частного вида, весь материал параграфа выстраивается вокруг изучения свойств выпуклых правильных многоугольников. При этом следует обратить внимание учащихся на то, что изучавшиеся ранее многоугольники (треугольники и четырехугольники) являются выпуклыми многоугольниками.

Текущие результаты изучения пункта 115. Учащиеся должны:

– *распознавать* на чертежах и *изображать* на чертежах и рисунках: многоугольники и его элементы, выпуклые и невыпуклые многоугольники;

– *описывать* ситуацию, изображенную на рисунке, и наоборот, по *описанию ситуации выполнять рисунок*, соотносить чертеж и текст;
– *формулировать*, *иллюстрировать* и *доказывать* теорему о сумме углов выпуклых многоугольников;
– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- определения многоугольника и его элементов, выпуклых и невыпуклых многоугольников;
- теорему о сумме углов выпуклого многоугольника;
- свойство внешних углов выпуклого многоугольника;
- алгебраический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Понятие *многоугольника и* его элементов вводится на наглядном уровне с опорой на рисунок 278 из учебника, поэтому полезно аналогичный рисунок выполнить на доске. Следует отметить, что понятие многоугольника является обобщением понятий треугольника и четырехугольника. С помощью этого же рисунка иллюстрируются *определения вершин, сторон и диагоналей многоугольника.*

Для формирования умения применять понятие *многоугольника* и умения находить *многоугольники* в стандартных ситуациях рекомендуется выполнить работу по готовым чертежам. Для этого можно использовать плакаты такого типа, как на рисунке 64, включив в набор заданных фигур контрпримеры 2) и 8). Поскольку понятие *многоугольника* является обобщением известных учащимся понятий, полезно в набор фигур плаката включить треугольник и четырехугольник. Работу с плакатом можно сопроводить вопросами:

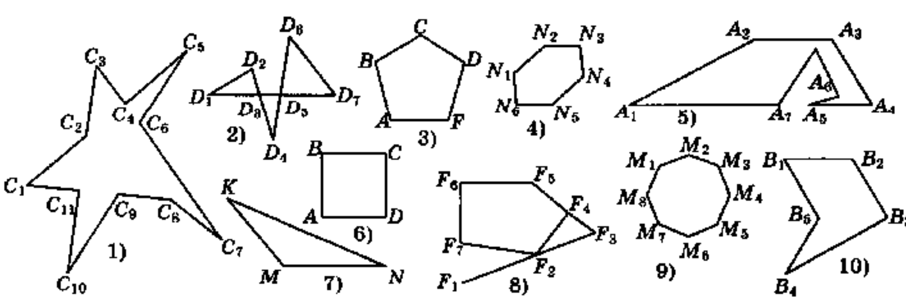


Рис. 64

1. Определите, на каких рисунках даны *многоугольники*.
2. Объясните, почему фигура под номером 2 не является многоугольником.
3. Объясните, почему фигура под номером 8 не является многоугольником.

В рабочей тетради следует записать формулировку определения многоугольника *и выполнить упражнения 108 и 109. Упражнение 109 – это аналог работы с плакатом, приведенном на рисунке 64. При использовании в данной теме рабочей тетради позволяет не делать плакат, что в свою очередь экономит время учителя как при подготовке к уроку, так и на самом уроке.*

2°. Понятие *выпуклого многоугольника*, как и понятие *многоугольника*, вводится на наглядном уровне с опорой на рисунок 280 из учебника, поэтому полезно аналогичный рисунок выполнить на доске, на которой одновременно изображены выпуклый и невыпуклый многоугольники.

Для закрепления нового понятия целесообразно предложить учащимся назвать известные им выпуклые многоугольники (треугольник, трапеция, параллелограмм, виды параллелограмма: прямоугольник, ромб, квадрат). Полезно обратить внимание учащихся на то, что все треугольники являются выпуклыми, но уже четырехугольники бывают как выпуклые, так и невыпуклые.

В рабочей тетради следует записать формулировку определения выпуклого многоугольника *и выполнить упражнения 110 и 111.*

3°. Понятие *периметра*, известное учащимся с начальной школы, достаточно хорошо отрабатывается в 5–6 классах и при рассмотрении треугольников и четырехугольников, поэтому не требует отработки, необходимо простое напоминание. Сначала полезно повторить определение *периметра* треугольника, а затем предложить учащимся сформулировать определение *периметра многоугольника*.

4°. Так как для доказательства утверждения *о сумме углов выпуклого n-угольника* используется тот факт, что из любой вершины выпуклого n-угольника можно провести $n-3$ диагонали, которые делят его на $n-2$ треугольника, то перед рассмотрением утверждения полезно устно по готовому чертежу решить следующие задачи:

1) Сколько диагоналей можно провести из одной вершины n-угольника, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) n – целое число, $n > 2$?

2) Из одной вершины выпуклого n-угольника проводятся все его диагонали. Сколько при этом образуется треугольников, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$; г) n – целое число, $n > 2$?

После решения этих задач теорему о *сумме углов выпуклого n-угольника* можно предложить учащимся разобрать по тексту учебника.

Затем на формирование умения применять полученную формулу можно предложить учащимся выполнить задачи 3–5 из дополнительных задач методического пособия.

> *В рабочей тетради следует записать формулировку теоремы о сумме углов выпуклого n-угольника и выполнить упражнения 114–116.*

5°. Понятие *внешнего угла* учащимся известно из § 4, поэтому достаточно простого повторения. Полезно повторить определение внешнего угла треугольника. При введении понятия *внешнего угла* выпуклого многоугольника при данной вершине следует сделать рисунок, на котором выделены все внешние углы (рис. 65), и отметить при этом, что при каждой вершине образуются два равных внешних угла, но обычно рассматривается только один.

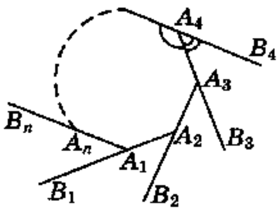


Рис. 65

Задачу 9 следует предложить учащимся для самостоятельного разбора по тексту учебника. На доказанное свойство внешних углов выпуклого n-угольника можно ссылаться при решении задач.

На формирование умения применять теорему о *сумме углов выпуклого n-угольника* и свойство внешних углов выпуклого n-угольника можно предложить учащимся выполнить устно задачи 6 – 10 из дополнительных задач методического пособия.

> *В рабочей тетради задачи 6–10 из дополнительных задач методического пособия даны под номерами 117–121. Их предлагается решить устно с записью развернутого ответа.*

6°. Перед рассмотрением темы «*Правильные многоугольники*» следует задать на дом для повторения: вписанные и описанные треугольники, касательная к окружности (7-й класс, § 5, вопросы 3–5, 8 и 9).

7°. Самостоятельную работу по темам «Ломаная» и «Выпуклые многоугольники» рекомендуется выполнить на первом уроке следующей темы.

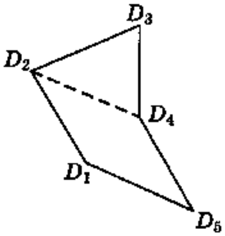
Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пункта 115, разобрать решение задачи 9 по тексту учебника; решить задачи 1–10 из дополнительных задач методического пособия; дома – вопросы 3–10 из § 15, вопросы 3–5, 8 и 9 из § 5; задачи 8, 10 и 11.

Самостоятельная работа по темам «Ломаная» и «Выпуклые многоугольники»

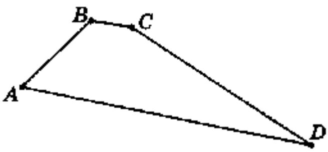
Самостоятельная работа содержит четыре задачи: первая и третья – с выбором ответа, а две другие – со свободным ответом.

1-й вариант



1. В четырехугольнике $D_1D_2D_4D_5$ все стороны равны, а треугольник $D_2D_3D_4$ – равносторонний. Найдите периметр пятиугольника $D_1D_2D_3D_4D_5$, если периметр четырехугольника $D_1D_2D_4D_5$ равен 28 см.

Ответ: ____________________



2. Дан четырехугольник $ABCD$. Определите, что больше: периметр четырехугольника P_{ABCD} или сумма длин его диагоналей AC и BD.

1) $P_{ABCD} = AC + BD$;
2) $P_{ABCD} < AC + BD$;
3) $P_{ABCD} > AC + BD$.

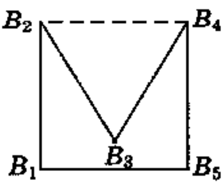
3. Сколько сторон имеет выпуклый n-угольник, если сумма его внутренних углов равна 1260°?

Ответ: 1. 5; 2. 9; 3. 7.

4. Сумма внутренних углов многоугольника в два раза больше суммы внешних углов, взятых по одному при каждой вершине. Определите, сколько вершин имеет этот многоугольник.

Ответ: ______________________________

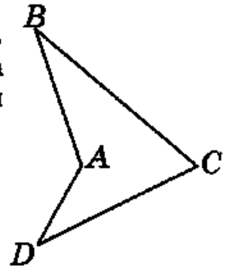
2-й вариант



1. В четырехугольнике $B_1B_2B_4B_5$ все стороны равны, а треугольник $B_2B_3B_4$ – равносторонний. Найдите периметр многоугольника $B_1B_2B_3B_4B_5$, если периметр треугольника $B_2B_3B_4$ равен 24 см.

Ответ: ____________________

2. Дан четырехугольник $ABCD$. Определите, что больше: периметр четырехугольника P_{ABCD} или сумма длин его диагоналей AC и BD.



1) $P_{ABCD} = AC + BD$;
2) $P_{ABCD} < AC + BD$;
3) $P_{ABCD} > AC + BD$.

3. Сколько сторон имеет выпуклый n-угольник, если сумма его внутренних углов равна 1620°?

Ответ: 1. 11; 2. 9; 3. 7.

4. Сумма внутренних углов многоугольника в три раза больше суммы внешних углов, взятых по одному при каждой вершине. Определите, сколько вершин имеет этот многоугольник.

Ответ: ______________________________

Дополнительные задачи

1. Может ли пятиугольник иметь стороны длиной 3 см, 4 см, 6 см, 8 см, 25 см?

2. Проверьте справедливость теоремы о сумме углов выпуклого n-угольника для треугольника.

3. Вычислите сумму углов выпуклого: а) пятиугольника; б) девятиугольника.

4. Сколько сторон имеет n-угольник, если сумма его внутренних углов равна: а) 1260°; б) 1980°?

5. Может ли в n-угольнике сумма его внутренних углов равняться: а) 360°, б) 380°?

6. Сумма углов выпуклого многоугольника в два раза меньше суммы внешних углов, взятых по одному при каждой вершине. Найдите число сторон этого многоугольника.

7. Сумма углов выпуклого многоугольника равна сумме его внешних углов, взятых по одному при каждой вершине. Найдите число сторон этого многоугольника.

8. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если все его внешние углы тупые?

9. Какое наибольшее число острых углов может быть у выпуклого многоугольника, если все его углы острые?

10. Определите вид выпуклого многоугольника, если все его внешние углы прямые.

Правильные многоугольники. Формулы для радиусов вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников

Комментарий для учителя

В этих пунктах продолжается изучение свойств многоугольников, а именно правильных многоугольников. Изучение свойства правильных многоугольников, вписанных в окружность и описанных около окружности, и их периметров позволяет подводить учащихся к понятию длины окружности и площади круга, а также выводу формул для их вычисления. Для правильных n-угольников доказывается существование описанной и вписанной окружностей.

При доказательстве теоремы о вписанных в окружность и описанных около окружности многоугольниках используются первый признак равенства треугольников, признак равнобедренного треугольника, которые необходимо повторить перед началом доказательства.

Текущие результаты изучения пунктов 116 и 117. Учащиеся должны научиться:

– *распознавать* на чертежах и *изображать* на чертежах и рисунках правильные многоугольники;

– *изображать* и *выделять* из ситуации, изображенной на чертежах или рисунках, конфигурацию, позволяющую применить формулы длины окружности и длины дуги;

– *описывать* ситуацию, изображенную на рисунке, и наоборот, по *описанию ситуации выполнять рисунок*, соотносить чертеж и текст;

– *формулировать, объяснять* и *доказывать* теорему о существовании описанной и вписанной окружностей;

– *объяснять* расположение центров вписанной и описанной окружностей правильного многоугольника;

– *объяснять* понятие «центр многоугольника»;

– *выводить* формулы для радиусов вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников;

– *решать* задачи на доказательство и вычисления с использованием:

- определения правильного многоугольника;
- формул для радиусов вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников;
- алгебраического аппарата.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. При введении определения *правильного многоугольника* следует обратить внимание учащихся на те признаки, которые позволяют из всех многоугольников выделить данный конкретный вид, а именно *правильные многоугольники*. Другими словами, если в условии сказано: «... *правильный многоугольник* ...», то учащиеся должны уметь записать равенство всех сторон и всех углов в ходе решения задачи или в краткой записи условия. Формирование этого навыка будет проходить в процессе изучения всей темы.

Для формирования умения применять понятие *правильного многоугольника* и умения находить их в стандартных ситуациях рекомендуется выполнить работу по готовым чертежам. Для этого можно использовать плакаты такого типа, как на рисунке 66, включив в набор заданных фигур контрпримеры 1), 2), 6) и 8). Поскольку понятие *правильного многоугольника* является обобщением известных учащимся понятий (квадрата и равносторонний треугольник), то полезно в набор фигур плаката включить треугольники и четырехугольники. Работу с плакатом можно сопроводить вопросами:

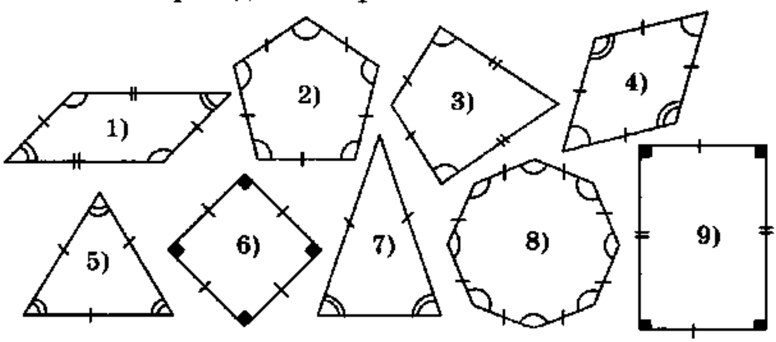


Рис. 66

1. Определите, на каких рисунках даны *правильные многоугольники*.

2. Объясните, почему фигуры под номерами 1), 3), 4) и 7), 9) не являются *правильными многоугольниками*.

Определение *правильного многоугольника* можно закрепить на примерах ранее изученных фигур.

1. Приведите примеры правильных треугольников и четырехугольников.

2. Приведите пример такого выпуклого многоугольника, у которого:

а) все стороны равны, но он не является правильным [ромб];

б) все углы равны, но он не является правильным [прямоугольник].

Для закрепления определения правильного многоугольника можно предложить учащимся решить задачи 12 и 13 из учебника или задачи 1–4 из дополнительных задач.

При использовании рабочей тетради записать формулировку определения правильного многоугольника. *Аналогом работы с плакатом в рабочей тетради является упражнение 125. Затем следует выполнить упражнение 126. Вместо задач 12 и 13 из учебника можно выполнить упражнения 127–130. Рабочая тетрадь позволяет решить больше задач и более глубоко понять введенное определение. Задачи 131–133 конкретизируют задачи 14 и 15 из учебника. В задачах 134–138 рассматриваются свойства наиболее часто употребляемых многоугольников. Эти задачи будут полезны при повторении и систематизации знаний по теме «Многоугольники».*

2°. Введение понятий *многоугольника, вписанного в окружность,* и *многоугольника, описанного около окружности,* полезно сопроводить заранее приготовленными плакатами, такими как на рисунках 67 и 68. Следует напомнить учащимся, что они уже встречались с частными случаями введенных понятий: окружностями, треугольниками и четырехугольниками, вписанными в окружность и описанными около окружности. При этом надо обратить внимание учащихся, что вписанными и описанными многоугольниками могут быть как правильные многоугольники, так и неправильные.

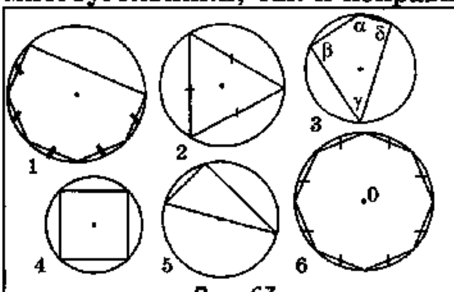


Рис. 67

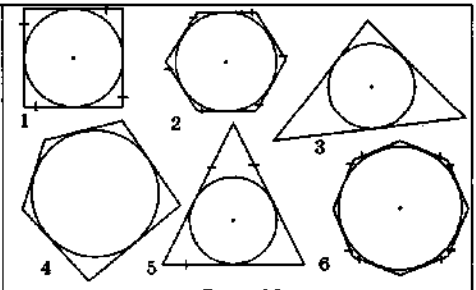


Рис. 68

Работу с плакатами можно сопроводить вопросами:

1. Определите, на каких рисунках даны *правильные многоугольники.*

2. Являются ли фигуры под номерами 4) и 5) для плаката на рисунке 67 *правильными многоугольниками?*

3. Являются ли фигуры под номерами 3), 4) и 6) для плаката на рисунке 68 *правильными многоугольниками?*

Полезно обратить внимание учащихся и на то, что если в условии сказано: *«многоугольник, вписанный в окружность»*, то это значит, что задана и *«окружность, описанная около этого многоугольника»*. Аналогично и для *многоугольника, описанного около окружности.*

После этого можно предложить учащимся практическое задание:

Начертите квадрат и постройте две окружности: а) вписанную в него; б) описанную около него.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку определения вписанного *и* описанного многоугольника *и выполнить практические задания 139 и 140.*

3'. Сформулировав теорему о вписанных и описанных многоугольниках, надо обратить внимание учащихся на то, что в ней доказываются два утверждения, а именно для любого правильного многоугольника существует:

1) окружность, описанная около него;

2) окружность, вписанная в него.

Доказательство сводится к нахождению точки, равноудаленной от всех вершин и всех сторон правильного многоугольника. Доказательство проводится с опорой на рисунок 282 из учебника.

После рассмотрения доказательства теоремы *о правильном многоугольнике, вписанном в окружность и описанном около окружности,* следует заметить, что в ходе доказательства теоремы устанавливается важный факт: *«Для правильного многоугольника центры вписанной в него и описанной около него окружностей совпадают».*

Кроме того, из доказательств этих теорем вытекает *правило нахождения для заданного правильного многоугольника общего центра описанной и вписанной окружностей,* а также их радиусов:

1. Чтобы найти центр описанной около правильного многоугольника окружности, нужно построить точку пересечения перпендикуляров, проведенных к серединам двух соседних сторон. Радиусом описанной окружности является отрезок, соединяющий точку пересечения серединных перпендикуляров с вершиной многоугольника.

2. Чтобы найти центр вписанной в правильный многоугольник окружности, нужно построить точку пересечения биссектрис двух соседних углов. Радиусом вписанной окружности является перпендикуляр, проведенный из точки пересечения биссектрис к стороне многоугольника.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку о вписанных и описанных многоугольниках. Предлагаемые задания 142 и 143 являются задачами повышенного уровня сложности и их лучше использовать для работы с сильными учащимися.

4°. Вывод формул для радиусов вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников полезно выполнить в процессе решения следующих задач.

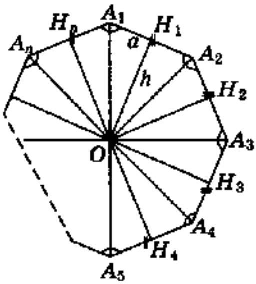


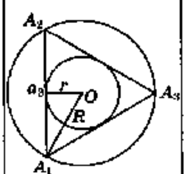
Рис. 69

Дано: A_1, A_2,..., A_n – правильный многоугольник; R – радиус описанной окружности;
r – радиус вписанной окружности;
a_n – сторона правильного многоугольника.

1. Выразить R и r через a_n.
2. Выразить a_n через R и r.

Для решения этих задач полезно заранее выполнить чертеж, как на рисунке 69.

Перед решением полезно пояснить учащимся, что n-угольник необходимо разбить на n треугольников и искомые элементы определяются из треугольника A_1OA_2, у которого OH_1 – высота, а OA_1 и OA_2 – биссектрисы углов $A_nA_1A_2$ и $A_1A_2A_3$ данного правильного n-угольника.

Число сторон n-угольника		Выражение радиусов описанной R_n и вписанной r_n окружностей через сторону a_n n-угольника		Выражение стороны a_n n-угольника через радиусы описанной R_n и вписанной r_n окружностей	
		R	r	R	r
3		$R_3 = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$	$r_3 = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$	$a_3 = R\sqrt{3}$	$a_3 = 2r\sqrt{3}$

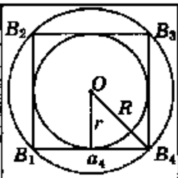
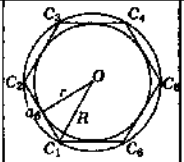
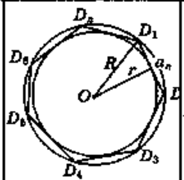
4		$R_4 = \frac{a}{\sqrt{2}}$	$r_4 = \frac{a}{2}$	$a_4 = R\sqrt{2}$	$a_4 = 2r$
6		$R_6 = a$	$r_6 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$	$a_6 = R$	$a_6 = \frac{2r}{\sqrt{3}}$
n		$R_n=\frac{a}{2\sin\frac{180}{n}}$	$r_n=\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180}{n}}$	$a_n = 2R\sin\frac{180°}{n}$	$a_n=2r\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$

Рис. 70

После вывода формул для правильного n-угольника следует рассмотреть их частные случаи. Вывод формул для частных случаев при n, равном 3, 4 и 6, полезно проиллюстрировать таблицей (рис. 70), которая поможет учащимся яснее понять геометрический смысл величин, входящих в формулы. Эту таблицу можно использовать при организации устного решения задач.

На непосредственное применение выведенных формул можно предложить учащимся упражнения:

1. В окружность радиуса $R = 12$ вписан правильный n-угольник. Определите его сторону, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.

2. Около окружности радиуса $r = 6$ описан правильный n-угольник. Определите его сторону, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.

3. Для правильного n-угольника со стороной $a = 6$ найдите радиус описанной около него окружности и радиус вписанной в него окружности, если: а) $n = 3$; б) $n = 4$; в) $n = 6$.

На формирование умения применять полученные формулы можно предложить учащимся задачи 19 и 23.

В рабочей тетради следует предложить учащимся выполнить упражнения 143 и 144. В упражнении 143 надо записать формулы, выражающие радиусы описанной R_n и вписанной r_n окружностей через сторону a_n n-угольника для $n = 3$; $n = 4$; $n = 6$ и в общем случае для n. В упражнении 144 надо записать формулы, выражающие сторону a_n n-угольника через радиусы описанной R_n и вписанной r_n окружностей для $n = 3$; $n = 4$; $n = 6$ и в общем случае для n. После выполнения упражнений 143 и 144 в рабочей тетради будут две таблицы, аналогичные таблице 69. Эти таблицы будут полезным справочным материалом для учащихся при решении задач. Кроме того, в этом случае можно не делать плакат (см. рис. 70) после чего выполнить задания 145 и 146.

5°. При решении задачи 17 следует обратить внимание учащихся на то, что решение этой задачи дает один из способов построения правильного треугольника, вписанного в данную окружность. В окружности надо провести произвольный радиус, найти его середину и через нее провести хорду, перпендикулярную радиусу. Взять раствор циркуля равным построенной хорде и сделать из одного из концов хорды засечку на окружности. Построена третья вершина правильного треугольника. Полезно проанализировать алгоритм построения.

6°. Материал пункта 118 достаточно прост, поэтому его можно задать на дом для самостоятельной работы.

7°. Поскольку определения *четырехугольника, вписанного в окружность*, и *четырехугольника, описанного около окружности*, были введены в теме «Четырехугольники», повторение этих определений следует задать на дом перед изучением темы «Вписанные и описанные четырехугольники».

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе провести самостоятельную работу по темам «Ломаная» и «Выпуклые многоугольники»; рассмотреть весь теоретический материал пункта 116; решить задачи 12 и 13 из учебника; дома – вопросы 8 и 9 из § 13, задачи 14 и 15.

На втором уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пункта 117; решить задачи 19 и 23; дома – самостоятельно разобрать материал пункта 118; вопросы для повторения 10–12, задачи 18, 24 и 30.

На третьем уроке: в классе провести самостоятельную работу 2; решить задачи 17, 21, 25, 26; дома – пункт 50 (8-й класс, § 6), задачи 20, 22, 27.

Самостоятельная работа по темам «Правильные многоугольники» и «Формулы для радиусов вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников»

Самостоятельная работа содержит четыре задачи со свободным ответом.

1-й вариант

1. Определите, для каких правильных n-угольников сторона больше радиуса описанной окружности.

Ответ: ______________________

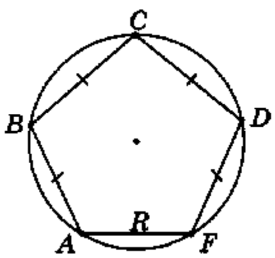
2. Сторона правильного шестиугольника равна 3 см. Найдите радиус описанной около него окружности.

Ответ: ______________________

3. Найдите центральный угол правильного n-угольника, если его сторона 6 см, а радиус вписанной окружности $3\sqrt{3}$ см.

Ответ: ______________________

4. В окружность диаметра 12 см вписан пятиугольник, одна сторона которого равна 6 см, а все остальные равны между собой. Найдите наибольший угол пятиугольника.



Ответ: ______________________

2-й вариант

1. Определите, для каких правильных n-угольников сторона меньше радиуса описанной окружности.

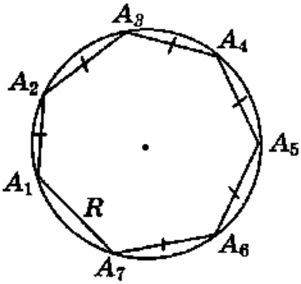
Ответ: ______________________

2. Сторона правильного треугольника равна $4\sqrt{3}$ см. Найдите радиус вписанной в него окружности.

Ответ: ______________________

3. Найдите центральный угол правильного n-угольника, если его сторона 2 см, а радиус описанной окружности $\sqrt{2}$ см.

Ответ: ______________________



4. В окружность диаметра 10 см вписан семиугольник, одна сторона которого равна 5 см, а все остальные равны между собой. Найдите наибольший угол семиугольника.

Ответ: ______________________

Указания к задачам

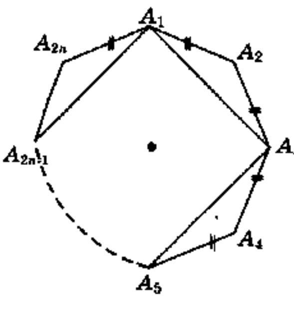


Рис. 71

14. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4, A_5,… A_{2n-1}, A_{2n} – вершины правильного $2n$-угольника, тогда A_1, A_3, A_5, …, A_{2n-1} – вершины n-угольника (рис. 71). Докажем, что все стороны $2n$-угольника равны между собой и все углы его тоже равны между собой.

Рассмотрим треугольники $A_1A_2A_3$, $A_3A_4A_5$, … , $A_{n-1}A_nA_1$. Эти треугольники – равнобедренные и $\angle A_2A_1A_3 = \angle A_1A_3A_2$; $\angle A_4A_3A_5 = \angle A_4A_5A_3$; …; $\angle A_{2n}A_{2n-1}A_1 = \angle A_{2n}A_1A_{2n-1}$ при их основаниях равны. При этом эти треугольники равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $A_1A_3 = A_3A_5 = \ldots = A_{2n-1}A_1$ и $\angle A_2A_1A_3 = \angle A_1A_3A_2 = \angle A_4A_3A_5 = \angle A_4A_5A_3 = \ldots = \angle A_{2n}A_{2n-1}A_1 = \angle A_{2n}A_1A_{2n-1}$. Обозначим величину каждого из этих углов β, а угол правильного $2n$-угольника α, тогда любой внутренний угол n - угольника равен $\alpha - 2\beta$, т. е. все внутренние его углы равны между собой. Таким образом, у n-угольника равны все стороны и все углы, следовательно, он правильный.

15. Решается аналогично задаче 14.

21. Наибольший размер будет иметь сторона квадрата, вписанного в данную окружность, так как его диагональю является диаметр окружности. У всех других возможных квадратов диагональ меньше диаметра. По формуле $a_4 = R\sqrt{2}$ находим сторону $a_4 = 2\sqrt{2}$ дм.

22. Сечение конца винта имеет наибольший размер, если оно представляет собой правильный треугольник, вписанный в окружность данного радиуса. По формуле $a_3 = R\sqrt{3}$ находим сторону $a_3 = \sqrt{3}$ см.

28. Пусть $A_1A_2A_3A_4 \ldots A_n$ – правильный n-угольник, вписанный в окружность радиуса R, со стороной, равной a. $B_1B_2B_3B_4 \ldots B_n$ – правильный n-угольник, описанный около той же окружности со стороной, равной b (рис. 72). Радиус окружности, описанной около n-угольника $A_1A_2A_3A_4 \ldots A_n$, равен $R = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$, а радиус окружности, вписанной в n-угольник $B_1B_2B_3B_4 \ldots B_n$, равен $r = \dfrac{b}{2\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$. По условию $R = r$. Отсюда

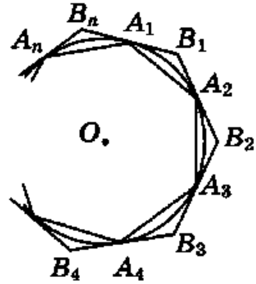


Рис. 72

$$\sin\frac{180^\circ}{n} = \frac{a}{2R}; \quad \cos\frac{180^\circ}{n} = \frac{1}{2R}\sqrt{4R^2 - a^2}; \quad \operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n} = $$

$$= \frac{a}{\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$ Таким образом, $$b = 2R\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n} = \frac{2aR}{\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$

Рисунок к задаче 28 – частный случай: многоугольники могут быть расположены не так. Проще: если M – середина A_1A_2, K – середина B_1B_2, то

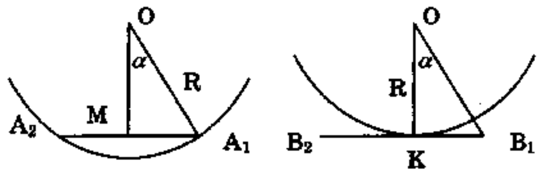


Рис. к задаче 28

$$OM = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4R^2 - a^2}{2}}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2} : OM = \frac{a}{\sqrt{4R^2 - a^2}};$$

$$\frac{b}{2} = R\operatorname{tg}\alpha, \quad b = \frac{2aR}{\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$

30. Вписать в окружность шестиугольник и через середину одной из сторон провести радиус. Точка пересечения радиуса и окружности будет вершиной двенадцатиугольника (рис. 73).

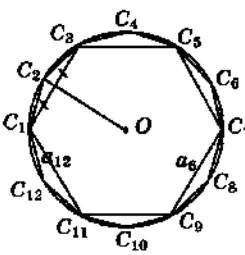


Рис. 73

Дополнительные задачи

1. Чему равна градусная мера внутреннего угла правильного: а) треугольника; б) четырехугольника; в) n-угольника?

2. Чему равна градусная мера внешнего угла правильного: а) треугольника; б) четырехугольника; в) n-угольника?

3. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если его угол равен $108°$? (Решите устно.)

4. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если его внешний угол равен $36°$? (Решите устно.)

5. Какой многоугольник получится, если последовательно соединить отрезками взятые через одну вершины правильного: а) шестиугольника; б) восьмиугольника; в) восемнадцатиугольника? (Решите устно.)

6. Какой многоугольник получится, если последовательно соединить отрезками середины сторон правильного: а) шестиугольника; б) восьмиугольника; в) восемнадцатиугольника? (Решите устно.)

7. Докажите, что если последовательно соединить отрезками взятые через одну вершины правильного восьмиугольника, то получится квадрат.

8. Сторона правильного шестиугольника равна a. Найдите его большую диагональя? (Решите устно.)

9. Сторона правильного восьмиугольника равна b. Найдите его большую диагональ.

10. Докажите, что в правильном шестиугольнике противолежащие стороны параллельны.

11. Докажите, что диагональ правильного пятиугольника параллельна одной из его сторон.

12*. Диагональ правильного пятиугольника равна d. Его стороны продолжены до пересечения друг с другом так, что получилась пятиконечная звезда. Найдите расстояние между двумя ее вершинами, лежащими на прямой, содержащей одну из сторон пятиугольника.

Вписанные и описанные четырехугольники

Комментарий для учителя

В этом пункте продолжается изучение свойств многоугольников, а именно четырехугольников, вписанных в окружность и описанных около окружности. Для этих четырехугольников доказываются теоремы о их свойствах и признаках.

Определения *четырехугольника, вписанного в окружность,* и *четырехугольника, описанного около окружности*, были введены в теме «Четырехугольники», поэтому следует вспомнить с учащимися эти определения. При доказательстве теоремы о свойстве вписанных в окружность четырехугольников делается ссылка на свойство четырехугольника: «Вписанный четырехугольник $ABCD$ является выпуклым, если его вершины A и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей диагональ BD». Поэтому это свойство вписанных четырехугольников полезно вспомнить перед доказательством теоремы. Для доказательства теоремы о признаке описанных около окружности четырехугольников используется свойство медианы равнобедренного треугольника.

Текущие результаты изучения пункта 119. Учащиеся должны научиться:

– *распознавать* на чертежах и *изображать* на чертежах и рисунках вписанные и описанные четырехугольники;

– *формулировать, объяснять* и *доказывать* свойства и признаки вписанных и описанных четырехугольников;

– *описывать* ситуацию, изображенную на рисунке, и наоборот, по *описанию ситуации выполнять рисунок*, соотносить чертеж и текст;

– *решать* задачи на доказательство и вычисления с использованием:

- определений вписанных и описанных четырехугольников;
- свойств и признаков вписанных и описанных четырехугольников;
- алгебраического аппарата.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Определения *четырехугольника, вписанного в окружность,* и *четырехугольника, описанного около окружности*, были введены в теме «Четырехугольники», поэтому следует вспомнить с учащимися эти определения. Полезно обратить внимание учащихся на то, что если в условии сказано: «*четырехугольник, вписанный в окружность*, то это значит, что задана и «*окружность, описанная около этого четырехугольника*». Аналогично и для *четырехугольника, описанного около окружности*.

Во вступлении к пункту сделано важное замечание: в определении угла выпуклого многоугольника речь идет только о выпуклых многоугольниках, и поэтому мы можем рассматривать только выпуклые четырехугольники. Поэтому доказательство теоремы начинается с утверждения:

> Вписанный четырехугольник $ABCD$ является выпуклым, если его вершины A и C лежат в разных полуплоскостях относительно прямой, содержащей диагональ BD.

Эту задачу можно решить устно совместно с учащимися.

> *В рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировки определения* четырехугольника, вписанного в окружность, *и* четырехугольника, описанного около окружности. *Решить задачу 147.*

2°. В теореме о свойстве и признаке четырехугольника, вписанного в окружность, сформулированы два утверждения, которые являются обратными друг другу. На это надо обратить внимание и, если учитель сочтет необходимым, устно повторить, что такое прямая и обратная ей теоремы.

Полезно на доске сделать такую запись, как в приведенной ниже таблице (рис. 74). Если сделать плакат по рисунку 74, то он будет неявной подсказкой при работе над условием теоремы о свойстве и признаке четырехугольника, описанного около окружности. Тогда можно предложить учащимся самим записать условие двух утверждений, сформулированных в теореме 13.5.

Свойство четырехугольника, вписанного в окружность	Признак четырехугольника, вписанного в окружность
Дано: $ABCD$ – *четырехугольник*; O – *центр окружности, описанной около* $ABCD$.	Дано: $ABCD$ – *четырехугольник*; $\angle ABC + \angle CDA = \angle DAB + \angle BCD$.
Доказать: $\angle ABC + \angle CDA = \angle DAB + \angle BCD$.	Доказать: O – *центр окружности, описанной около* $ABCD$.

Рис. 74

Стороны вписанных углов BAD и BCD пересекают окружность в точках B и D и опираются на дуги, дополняющие друг друга до полной окружности. Отсюда следует свойство вписанного четырехугольника.

На прямое применение доказанного свойства вписанного четырехугольника можно предложить следующую задачу:

> 1. Два соседних угла $\angle A$ и $\angle B$ вписанного четырехугольника $ABCD$ равны 23° и 157°. Найдите два других угла.

2. Два соседних угла $\angle A$ и $\angle D$ вписанного четырехугольника $ABCD$ равны. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – трапеция.

Полезно после этого решить задачу 32 из учебника, сформулировав обратное утверждение.

В рабочей тетради следует предложить учащимся сформулировать свойство и признак четырехугольника, вписанного в окружность, *и внимательно следить по тексту таблицы за объяснением формулировки теоремы 13.4. Решить задачи 148, 149, 150 и 151. Задачи 148 и 149 являются вышеприведенными задачами, а задача 151 – это задача 32 из учебника.*

3°. Методика работы над формулировкой теоремы о свойстве и признаке четырехугольника, описанного около окружности, такая же, как и методическая работа над теоремой о свойстве и признаке четырехугольника, вписанного в окружность. В теореме о свойстве и признаке четырехугольника, описанного около окружности, как и в теореме о свойстве и признаке четырехугольника, вписанного в окружность, сформулированы два утверждения, которые являются обратными друг другу. На это надо обратить внимание, и будет полезным предложить учащимся самостоятельно сделать такую же запись, как в таблице на рисунке 74. Эта запись должна выглядеть примерно так, как на рисунке 75.

Свойство четырехугольника, описанного около окружности	Признак четырехугольника, описанного около окружности
Дано: $ABCD$ – *четырехугольник*; *O – центр окружности, описанной около $ABCD$.* Доказать: $AB + CD = BC + AD$.	Дано: $ABCD$ – *четырехугольник*; $AB + CD = BC + AD$. Доказать: *O – центр окружности, описанной около $ABCD$.*

Рис. 75

В задаче 5 из § 6 учебника доказывается свойство *четырехугольника, описанного около окружности: «Суммы противолежащих сторон четырехугольника, описанного около окружности, равны»*. Поэтому здесь следует повторить ее решение. Перед доказательством полезно вспомнить свойство отрезков касательных, проведенных из одной точки к окружности.

Докажите, что у четырехугольника, описанного около окружности, суммы противолежащих сторон равны.

На прямое применение свойства *четырехугольника, вписанного в окружности*, можно устно решить задачи 2 и 3 из дополнительных задач.

Сумма двух противоположных сторон описанного четырехугольника 13 см. Найдите периметр четырехугольника.

В трапецию вписана окружность. Найдите периметр этой трапеции, если ее основания равны 8 см и 12 см.

В рабочей тетради следует предложить учащимся сформулировать свойство и признак четырехугольника, описанного около окружности, *и выполнить задание 152. Решить задачи 153 и 154. Задачи 153 и 154 являются вышеприведенными задачами.*

4°. В теме «Четырехугольники» (8-й класс, § 6) было приведено достаточно сложное доказательство признака *многоугольника, описанного около окружности*, как дополнительный материал. Оно основывалось на знаниях учащихся, полученных в 7 классе. Теперь его доказательство значительно проще и его можно провести при активном участии учащихся.

При доказательстве *признака описанного многоугольника* необходимо провести более подробные выкладки, чем это сделано в учебнике.

1. Сначала докажем, что если у четырехугольника все стороны равны, то он является описанным четырехугольником около окружности, центр которой лежит на пересечении его диагоналей. По определению, четырехугольник, у которого все стороны равны, – ромб. Поэтому можно предложить учащимся следующую задачу:

Докажите, что точка пересечения диагоналей ромба равноудалена от его сторон.

Из доказанного следует: *в ромб можно вписать окружность.* Что и требовалось доказать.

2. Пусть теперь соседние стороны не равны и при этом $AB > BC$, тогда $AD > CD$ следует из условия $AB + CD = BC + AD$.

Выполним дополнительное построение (рис. 288 учебника): на стороне AB от вершины B отложим отрезок BM, равный BC, а на стороне AD от вершины D отложим отрезок DN, равный CD. Получим три равнобедренных треугольника CBM, CDN и MAN. Треугольник MAN – равнобедренный, так как $AB + CD = BC + AD$ или $BM + MA + CD = BC + DN + NA$ или $BC + MA + CD = BC + CD + NA$, значит, $MA = AN$. Далее по тексту учебника.

На прямое применение признака *четырехугольника, описанного около окружности*, можно решить задачу 4 из дополнительных задач.

В рабочей тетради следует предложить учащимся решить задачу 155, можно устно. После доказательства признака четырехугольника, описанного около окружности, *решить задачу 156.*

Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пункта 119; решить задачу 32 из учебника; дома – вопросы 13 и 14 из § 13, задачи 33, 34 и 35.

Указания к задачам

32. Так как в равнобокой трапеции углы, прилежащие к одной боковой стороне, в сумме равны 180°, а углы, прилежащие к одному основанию, равны, то противолежащие углы трапеции в сумме равны 180°. Следовательно, около равнобокой трапеции можно описать окружность.

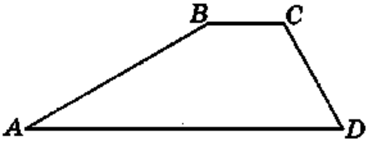


Рис. 76

Обратное утверждение: *если около трапеции можно описать окружность, то она равнобокая.* Предположим, что это не так. Тогда $\angle A \neq \angle D$, а $\angle B \neq \angle C$. Пусть для определенности $\angle A = \angle D - \alpha$ (рис. 76), отсюда $\angle B = \angle C + \alpha$, так как углы, прилежащие к одной боковой стороне, в сумме равны 180°, т.е. $\angle A + \angle B = 180°$ и $\angle C + \angle D = 180°$. Поскольку по условию: около трапеции можно описать окружность, то $\angle A + \angle C$ должно равняться 180°. Отсюда $\angle A + \angle C = \angle D - \alpha + \angle C$ тоже должно равняться 180°, но $\angle C + \angle D = 180°$. Пришли к противоречию. Следовательно, обратное утверждение справедливо.

Можно проще: так как сумма углов, прилежащих к боковой стороне равна 180°, то $\angle A = 180° - \angle B$. Так как по условию около трапеции можно описать окружность, то $\angle B + \angle D = 180°$, $\angle D = 180° - \angle B$. Тогда $\angle A = \angle D$, откуда $AB = CD$.

33. Точки K, L и M – точки касания окружности, вписанной в трапецию, со сторонами трапеции AB, BC и AD соответственно (рис. 77). Пусть $BK = BL = 4x$, и $AK = AM = 9x$, $AB = 13x$. Тогда в прямоугольном треугольнике ABF $AB^2 = AF^2 + BF^2$, $(13x)^2 = (5x)^2 + 24^2$, $x = 2$, $AB = 26$. Так как равнобокая трапеция описана около окружности, то $AB + CD = BC + AD$.

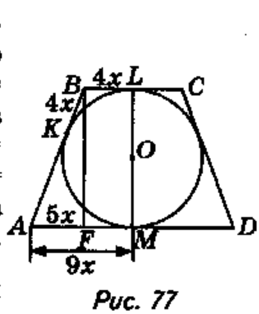


Рис. 77

Средняя линия трапеции равна $\frac{1}{2}(BC + AD)$ или $\frac{1}{2}(AB + CD) = AB = 26$ (дм).

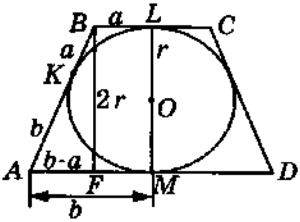


Рис. 78

34. Точки K, L и M – точки касания окружности, вписанной в трапецию, со сторонами трапеции AB, BC и AD соответственно (рис. 78). Пусть $BK = BL = a$, и $AK = AM = b$, $AB = a + b$.Тогда в прямоугольном треугольнике ABF $AB^2 = AF^2 + BF^2$, $(a + b)^2 = (b - a)^2 + (2r)^2$, $4r^2 = (a + b)^2 - (b - a)^2 = 4ab$, $r^2 = ab$.

Дополнительные задачи

1. Два соседних угла $\angle A$ и $\angle B$ вписанного четырехугольника $ABCD$ равны 23° и 157°. Найдите два других угла.

2. Два соседних угла $\angle A$ и $\angle D$ вписанного четырехугольника $ABCD$ равны. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – трапеция.

3. В трапецию вписана окружность. Найдите периметр этой трапеции, если ее основания равны 8 см и 12 см.

4. Докажите, что если в прямоугольник можно вписать окружность, то прямоугольник – квадрат.

Подобие правильных выпуклых многоугольников. Длина окружности. Радианная мера угла

Комментарий для учителя

В пункте 120 продолжается изучение свойств выпуклых правильных многоугольников, а именно их подобие. Важным моментом здесь является следствие из теоремы о подобии выпуклых правильных многоугольников об отношении периметров и радиусов правильных n-угольников. С опорой на это следствие в пункте 121 доказывается независимость отношения длины окружности к ее диаметру от выбранной окружности, выводится знакомая учащимся с начальной школы формула длины окружности $l = 2\pi R$. Формальное определение длины окружности в учебнике не дается; оно вводится с опорой на наглядные представления учащихся. При этом изученные ранее свойства правильных многоугольников, вписанных в окружность и описанных около окружности, позволяют подготовить учащихся к восприятию длины окружности как наглядного предельного перехода от периметра вписанного или описанного n-угольника. При этом предельный переход, естественно, используется в неявном виде.

В пункте 122 учащиеся знакомятся с новой для них *мерой углов, называемой радианной*. При этом выводятся формулы для выражения радианной меры угла через его градусную меру и наоборот. Следует заметить, что радианная мера углов не входит в содержание, определяемое «Примерными программами основного общего образования», однако рассмотреть ее на уроке полезно. В формулировках многих задачах не только этого учебника, но и других учебников или сборников задач эта мера используется.

Текущие результаты изучения пунктов 120–122. *Учащиеся должны научиться:*

– *формулировать, объяснять* и *иллюстрировать* теорему о подобии выпуклых многоугольников и следствие об отношении периметров и радиусов вписанных и описанных окружностей;

– *объяснять* понятие длины окружности, опираясь на наглядные представления;

– *вычислять* длину окружности, длину дуги окружности;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- понятие подобия выпуклых многоугольников;
- отношения периметров и радиусов правильных n-угольников;
- формулы длины окружности и длины дуги окружности,
- алгебраический аппарат.

Учащиеся получат возможность научиться:

– объяснять соотношение между градусной и радиальной мерами угла;

– выводить формулы перехода от градусной меры угла к радианной и обратно;

– применять при решении задач на вычисления и доказательство:

- *формулы перехода от градусной меры угла к радианной и обратно.*

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Материал пункта «Подобие правильных выпуклых многоугольников» является пропедевтическим для тем «Длина окружности» и «Площадь круга». Содержание пункта «Подобие правильных выпуклых многоугольников» носит вспомогательный характер и подчинено основной цели урока – обоснованию формулы длины окружности. Рассмотрение его целесообразно построить в виде рассказа учителя с привлечением заранее подготовленного наглядного материала. Опрос учащихся по нему можно не проводить, кроме формулировок теоремы и следствия из нее.

Доказательство первой части (в формулировке она – вторая) можно провести по рисунку 289 из учебника.

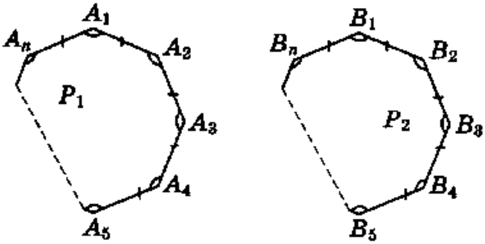


Рис. 79

Для доказательства второй части (в формулировке она – первая) полезно сделать рисунки типа рисунков 79 и 80.

Пусть многоугольники P_1: $A_1A_2A_3A_4\ldots\ A_n$ и P_2: $B_1B_2B_3B_4\ \ldots\ B_n$ – правильные выпуклые n-угольники с одинаковым числом сторон (см. рис. 79). Подвергнем многоугольник P_1 преобразованию гомотетии с коэффициентом $k = \dfrac{B_1B_2}{A_1A_2}$ (см. рис. 80).

Далее по тексту учебника.

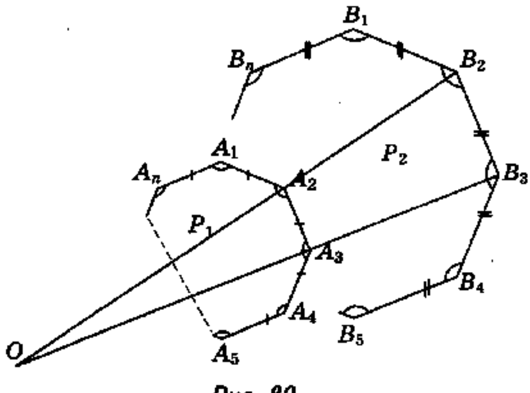


Рис. 80

Особое внимание учащихся следует обратить на следствие из теоремы: «у правильных n-угольников отношения периметров, радиусов вписанных и описанных окружностей равны», который будет использоваться в следующем пункте при обосновании независимости отношения длины окружности к ее диаметру для любых окружностей.

На проверку понимания следствия из теоремы 13.6 можно предложить учащимся устно выполнить упражнение 37 из учебника.

В рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку теоремы о подобии правильных выпуклых многоугольников и следствия из этой теоремы. Записать краткий ответ к задаче 157, аналогичной задаче 37 из учебника.

2°. В учебнике для формирования у учащихся *наглядного представления о длине окружности* предлагается развернуть нить, сложенную в форме окружности. Длина этой нити будет соответствовать длине окружности, в которую она была свернута. Кроме того, в учебнике сделано замечание: «длина окружности сколь угодно мало отличается от периметра вписанного в нее выпуклого многоугольника с достаточно малыми сторонами». Чтобы показать учащимся, что длина окружности как угодно мало отличается от периметра вписанного в нее правильного многоугольника с большим числом сторон, можно заранее, если есть такая возможность, сделать плакат по рисунку 80, на котором в окружности одного и того же радиуса вписаны правильные *n-угольники* при $n = 4; 8; 16, 32$ (рис. 81). По рисункам плаката на наглядном уровне учащиеся смогут проследить, как с увеличением числа сторон правильного вписанного многоугольника его периметр все меньше отличается от *длины окружности*.

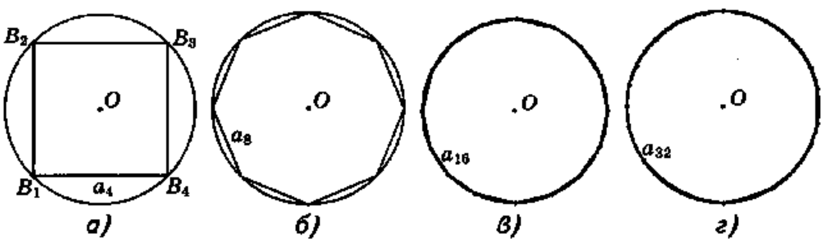


Рис. 81

После этого можно предложить учащимся устно выполнить следующее упражнение и записать его ответ в виде неравенства на доске.

Сравните периметры правильных n-угольников, вписанных в окружность, радиус которой равен 2 см, при $n = 4$, 6, 12.

В рабочей тетради эта задача дана под номером 158.

3°. Доказательство теоремы «*Отношение длины окружности к ее диаметру есть одно и то же число для всех окружностей*» проводится с опорой на следствие из теоремы о подобии правильных выпуклых многоугольников: «*У правильных многоугольников отношения периметров, радиусов вписанных и радиусов описанных окружностей равны*» и неявный предельный переход от периметра правильных вписанных n-угольников.

Как всегда доказательство теоремы начинается с краткой записи условия заключения теоремы и выполнения рисунка (рис. 82).

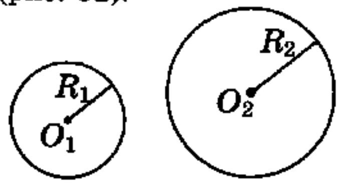


Рис. 82

Дано: R_1 – радиус окружности с центром O_1;
R_2 – радиус окружности с центром O_2;
l_1 – длина окружности с центром O_1;
l_2 – длина окружности с центром O_2.

Доказать: $\dfrac{l_1}{2R_1} = \dfrac{l_2}{2R_2}$.

После проведения доказательства теоремы «*Отношение длины окружности к ее диаметру есть одно и то же число для всех окружностей*» необходимо обратить внимание учащихся на то, что это число, равное $\dfrac{l}{2R}$, обозначается греческой буквой π и приблизительпо равно 3,14. Именно существование этой копстанты позволяет вывести формулу длины окружности $l = 2\pi R$.

Небольшая историческая справка.

Впервые стал обозначать число $\dfrac{l}{2R}$ греческой буквой π британский математик Джонс в 1706 году, а общепринятым оно стало благодаря русскому математику немецкого происхождения Леонарду Эйлеру. Само обозначение пронсходит от начальной буквы греческих слов περιφέρεια – окружность, периферия и περίμετρος – периметр.

То, что «*отношение длины окружности к ее диаметру есть одно и то же число для всех окружностей*», и то, что это отношение немногим более 3, было известно еще древнеегипетским, вавилонским, древнеиндийским и древнегреческим геометрам. Возможно, первым предложил математический способ вычисления числа π Архимед. Принимая диаметр окружности за единицу, Архимед рассматривал периметр вписанного многоугольника как нижнюю оценку длины окружности, а периметр описанного многоугольника как верхнюю оценку. Рассматривая правильный 96-угольник, Архимед предположил, что π примерно равняется $\dfrac{22}{7} \approx$ 3,142857142857143.

После вывода формулы *длины окружности* полезно в ходе устного решения задач 38 1) и 39 провести исследование зависимости *длины окружности* от изменения ее радиуса. Решение задачи 40 в классе, а задачи 41 – дома наглядно продемонстрируют учащимся старинный алгоритм поиска приближенного значения числа π.

На формирование умения применять полученную формулу *длины окружности* можно предложить учащимся задачи 44 1) и 45 3).

В рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку теоремы об отношении длины окружности *к ее диаметру и формулу* длины окружности. *Исследование зависимости* длины окружности *от изменения ее радиуса можно провести в ходе решения задач 159 и 160. На формирование умения применять полученную формулу* длины окружности *можно предложить учащимся задачи 161–164.*

4°. Вывод формулы *длины дуги окружности* основывается на том, что градусная мера развернутого центрального угла равна 180° и ему соответствует половина длины окружности πR. Поэтому, предложив учащимся определить длину дуги окружности, соответствующую центральному углу в 1°, получим $\frac{\pi R}{180°}$. Длина дуги окружности, соответствующая центральному углу в $n°$, равна $\frac{\pi R}{180°} n°$. Получили формулу для вычисления *длины дуги окружности*.

После вывода формулы *длины дуги окружности* полезно в ходе решения задачи 7 из дополнительных задач методического пособия исследовать зависимость центрального угла дуги окружности от изменения ее радиуса.

На формирование умения применять полученную формулу *длины дуги окружности* можно предложить учащимся устно по рисунку на доске выполнить задачи 47 2) и 3), 48 1) и 3) из учебника.

В рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулу длины дуги окружности. *Исследование зависимости центрального угла* дуги окружности *от изменения ее радиуса можно провести в ходе решения задачи 165, которая в дополнительных задачах методического пособия дана под номером 7. На формирование умения применять полученную формулу* длины дуги окружности *можно предложить учащимся задачи 166–170, причем задача 170 дана в дополнительных задачах методического пособия под номером 8.*

5°. В пункте 122 вводится новая единица измерения углов. За единицу измерения принимается 1 радиан, равный ≈ 57°. Поскольку радианная мера угла является еще одной единицей измерения углов, то важным моментом здесь является усвоение формулы, выражающей переход от градусной меры угла к радианной.

Для понимания и усвоения новой единицы измерения углов и ее связи с привычной для учащихся градусной мерой угла рекомендуется выполнить устно упражнения 53 и 55 из учебника. Если есть возможность, можно нарисовать на доске таблицу (рис. 83) и заполнить ее с учащимися.

Градусная мера угла	30°	45°		90°			150°		240°
Радианная мера угла			$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$		π	

Рис. 83

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пунктов 120 и 121; решить задачи 37, 38 1), 39, 40, 44 1) и 45 3) из учебника; дома – вопросы 15–17 из § 13, задачи 38 1), 41, 44 2) и 45 1).

На втором уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пункта 122; решить задачи 47 2), 3), 48 1), 3), 53, 55 2), 4), 5) и провести самостоятельную работу; дома – вопросы для повторения 18–20, задачи 47 1), 4), 48, 2), 4), 50 1), 2), 51 3) и 54.

Самостоятельная работа по темам «Подобие правильных выпуклых многоугольников», «Длина окружности» и «Радианная мера угла»

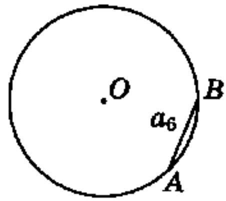
Самостоятельная работа содержит пять задач: первые три – со свободным ответом, четвертая и пятая – с выбором ответа.

1-й вариант

1. Найдите длину дуги окружности, соответствующей центральному углу, равному 135°, если радиус окружности 6 см.

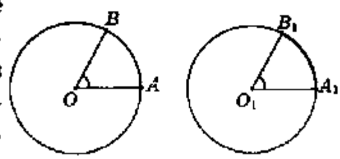
Ответ: ______________________________

2. В окружности радиуса 5 см хорда AB является стороной правильного шестиугольника. Найдите длину меньшей дуги, стягиваемой этой хордой.



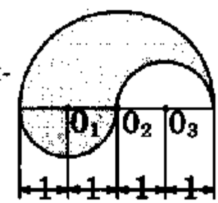
Ответ: 1. $\frac{5\pi}{2}$; 2. $\frac{5\pi}{4}$ см; 3. $\frac{10\pi}{3}$ см; 4. $\frac{5\pi}{3}$ см.

3. Дуги A_1B_1 и AB соответствуют равным центральным углам. Найдите отношение длин дуг A_1B_1 и AB, если радиус окружности с центром в точке O равен 9 см, а радиус окружности с центром в точке O_1 равен 3 см.



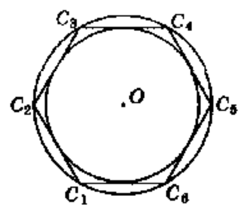
Ответ: ______________________________

4. Найдите длину границы заштрихованной фигуры, используя данные рисунка.



Ответ: 1. 6π; 2. 2π; 3. 4π; 4. 3π.

5. Найдите отношение радиуса окружности, вписанной в правильный шестиугольник, к радиусу окружности, описанной около него.

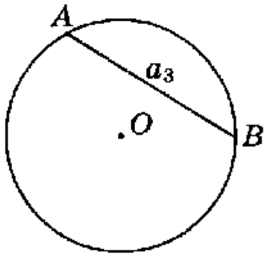


Ответ: 1. $\frac{1}{2}$; 2. $\frac{2}{\sqrt{3}}$; 3. 2; 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2-й вариант

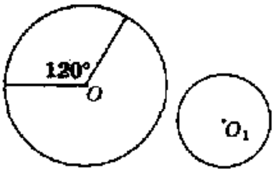
1. Найдите длину дуги окружности, соответствующей центральному углу, равному 240°, если радиус окружности 6 см.

Ответ: ______________________________



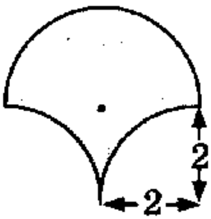
2. В окружности радиуса 5 см хорда AB является стороной правильного треугольника. Найдите длину меньшей дуги, стягиваемой этой хордой.

Ответ: 1. $\frac{5\pi}{2}$; 2. $\frac{5\pi}{4}$ см; 3. $\frac{10\pi}{3}$ см; 4. $\frac{5\pi}{3}$ см.



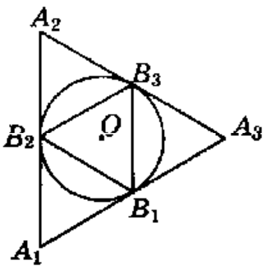
3. Дуга окружности с центром в точке O соответствует центральному углу, равному $120°$. Известно, что длина окружности с центром в точке O_1 равна длине этой дуги. Найдите отношение радиусов окружностей.

Ответ: ______________________________



4. Найдите длину границы заштрихованной фигуры, используя данные рисунка.

Ответ: 1. 4π; 2. 8π; 3. 16π; 4. 6π.



5. Найдите отношение стороны правильного треугольника, описанного около окружности, к стороне правильного треугольника, вписанного в нее.

Ответ: 1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; 3) 2; 4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Указания к задачам

40. Пусть сторона правильного вписанного восьмиугольника равна a. Тогда его периметр равен $8a$. Радиус окружности, в которую вписан восьмиугольник, равен $R_8 = \dfrac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}$. Диаметр описанной окружности равен $2R_{\text{опс}} = \dfrac{a}{\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$. Отношение периметра восьмиугольника к диаметру описанной окружности равно $\dfrac{8a\sin\dfrac{180^\circ}{8}}{a} = 8\sin\dfrac{180^\circ}{8} = 8\sin22{,}5^\circ \approx 3{,}06$. При нахождении $\sin22{,}5^\circ$ можно воспользоваться калькулятором.

41. Пусть сторона правильного вписанного 12-угольника равна a. Тогда его периметр равен $12a$. Радиус окружности, в которую вписан двенадцатиугольник, равен $R_{12} = \dfrac{a}{2\sin\dfrac{180^\circ}{12}}$.

Диаметр описанной окружности равен $2R_{\text{опс}} = \dfrac{a}{\sin\dfrac{180^\circ}{12}}$. Отношение периметра 12-угольника к диаметру описанной окружности равно $\dfrac{12a\sin\dfrac{180^\circ}{12}}{a} = 12\sin\dfrac{180^\circ}{12} = 12\sin15^\circ \approx 3{,}06$. При нахождении $\sin15^\circ$ можно воспользоваться калькулятором.

42. Так как 1 м составляет $\dfrac{1}{40\,000\,000}$ часть длины экватора, то $\dfrac{1}{40\,000\,000} = 2\pi R_{\text{экв.}}$ Отсюда $R_{\text{экв}} = \dfrac{2\,000\,000}{\pi} \approx 6\,366\,203 \approx$ ≈ 6366 км.

44. 1) В окружность радиуса R вписаны три окружности радиуса r (рис. 84). Треугольник $O_1O_2O_3$ – правильный со стороной, равной $2r$. Точка O – центр окружности, описанной около трех окружностей радиуса r. Центр окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$, и он совпадает с точкой O, так как окружность, описанная около трех окружностей радиуса r, и окружность, описанная около треугольника $O_1O_2O_3$, являются концентрическими с шириной кольца, равной r. Радиус окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$, равен $\dfrac{2r}{\sqrt3}$.

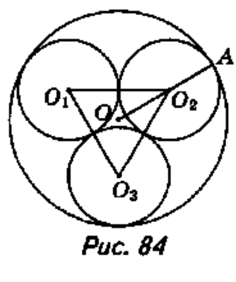


Рис. 84

Отсюда $R = \dfrac{2r}{\sqrt3} + r = r\dfrac{2+\sqrt3}{\sqrt3}$; $r = \dfrac{R\sqrt3}{2+\sqrt3} = R(2\sqrt3 - 3)$.

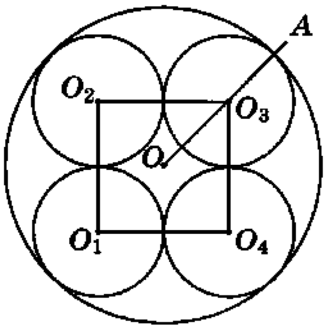


Рис. 85

44. 2) В окружность радиуса R вписаны четыре окружности радиуса r (рис. 85). Четырехугольник $O_1O_2O_3O_4$ – правильный со стороной, равной $2r$. Как и в случае 1), доказывается, что точка O является одновременно центром окружности, описанной около четырех окружностей радиуса r, и центром окружности, описанной около четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$. Радиус окружности, описанной около четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$, равен $r\sqrt{2}$. Отсюда $R = r\sqrt{2} + r =$ $= r(\sqrt{2} + 1)$; $r = \dfrac{R}{\sqrt{2}+1} = R(\sqrt{2} - 1)$.

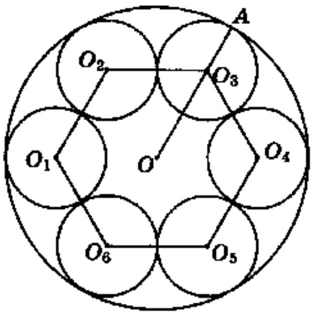


Рис. 86

44. 3) В окружность радиуса R вписаны шесть окружностей радиуса r (рис. 86). Шестиугольник $O_1O_2O_3O_4O_5O_6$, – правильный со стороной, равной $2r$. Обоснование решения аналогично решениям для трех и четырех окружностей, вписанных в окружность радиуса R. Радиус окружности, описанной около шестиугольника $O_1O_2O_3O_4O_5O_6$, равен $2r$. Отсюда $R = 3r$; $r = \dfrac{R}{3}$.

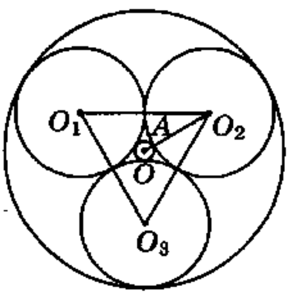


Рис. 87

45. 1) Около окружности радиуса R описаны три окружности радиуса r (рис. 87). Треугольник $O_1O_2O_3$ – правильный со стороной, равной $2r$. Точка O – центр окружности, касающейся всех трех окружностей радиуса r. Центр окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$, совпадает с точкой O. Радиус окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$, равен $\dfrac{2r}{\sqrt{3}}$. Отсюда $R = \dfrac{2r}{\sqrt{3}} - r =$ $= r(\dfrac{2}{\sqrt{3}} - 1)$; $r = \dfrac{R\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = R(2\sqrt{3} + 3)$.

45. 2) $n = 4$ (рис. 88). Радиус окружности, описанной около четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$, равен $r\sqrt{2}$. $R + r = r\sqrt{2}$;

$r = R(\sqrt{2} + 1)$.

45. 3) $n = 6$ (рис. 89). Радиус окружности, описанной около шестиугольника $O_1O_2O_3O_4O_5O_6$, равен $2r$. $R + r = 2r$; $r = R$.

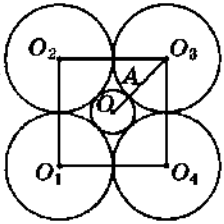


Рис. 88

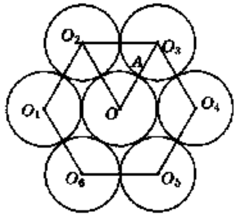


Рис. 89

46. При одном обороте точка A проходит путь, равный $2\pi R = 2\pi \cdot 0{,}7 \approx 4{,}396$ (м). За 1 минуту она проходит путь равный $80 \cdot 4{,}396 \approx 351{,}68$ (м), т. е. ее скорость равна 351,68 (м/мин).

Дополнительные задачи

1. Сравните периметры правильных n-угольников, вписанных в окружность, радиус которой равен 2 см, при $n = 3, 6, 12$.

2. Как изменится длина окружности, если радиус увеличится на: 1) 3 см; 2) 20 м; 3) a см?

3. Как изменится длина окружности, если ее радиус увеличить на k см?

4. Как изменится длина окружности, если ее радиус увеличить в k раз?

5. Найдите отношение периметра правильного вписанного 24-угольника к диаметру описанной окружности радиуса 2 и сравните его с приближенным значением π.

6. С вала сняли слой стружки толщиной 0,5 см. Определите длину окружности вала до обработки, если длина окружности вала после обработки стала равной 28,25 см.

7. Дуги A_1B_1 и A_2B_2 равной длины l принадлежат разным окружностям с радиусами R_1 и R_2. Найдите отношение градусных мер центральных углов, соответствующих этим дугам.

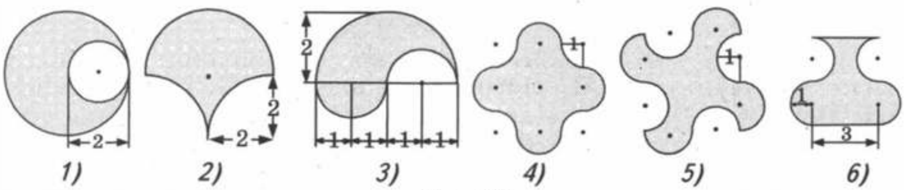


Рис. 90

8. Найдите длину границы каждой из заштрихованных фигур, используя данные рисунка 90 (1 – 6).

Систематизация и обобщение знаний по теме «Многоугольники»

Комментарий для учителя

1°. В результате систематизации и обобщения знаний по теме «Решение многоугольников» учащиеся должны:

– *выделять* на чертеже, данном в условии задачи, конфигурации, необходимые для применения определений и свойств многоугольников;

– *выводить* формулы, связывающие радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности со стороной правильного n-угольника; формулы длины окружности и длины дуги окружности;

– *вычислять* длину окружности, длину дуги окружности;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- теорему о сумме углов выпуклого n-угольника;
- формулы, связывающие радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности со стороной правильного n-угольника;
- формулы длины окружности и длины дуги окружности;
- определение и свойство ломаной;
- определения выпуклого и правильного многоугольников и их свойство быть вписанным в окружность и описанным около окружности;
- свойства вписанных в окружность и описанных около окружности четырехугольников;
- алгебраический аппарат.

2°. Подготовку к контрольной работе по теме «Многоугольники» полезно организовать как урок решения задач. Для этого можно использовать нерешенные задачи из § 13 из учебника, в ходе решения которых провести повторение. Кроме того, можно подобрать задачи из разделов «Дополнительные задачи» в зависимости от уровня подготовки класса.

В сборнике тестов Т.М. Мищенко «Геометрия. Тесты. 9 класс» к учебнику А.В. Погорелова издательства «Просвещение» для § 13 «Решение многоугольников» рекомендованы тесты 7 и 8, направленные на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении этой темы. Каждый тест имеет четыре варианта.

Повторение можно организовать несколькими способами.

Первый способ: итоговый тест по теме можно создать из тестов 7 и 8, используя часть заданий из каждого теста. Следует заметить, что в зависимости от уровня класса можно использовать и более легкие задания тестов или более сложные. Кроме того, полезно разобрать хотя бы одну из десяти задач теста 8, решение которых требует знания формул, связывающих радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности со стороной правильного n-угольника и умения их применять.

Второй способ: поскольку тесты не предполагают письменного оформления каждого задания, то можно из каждого теста выполнить по одному варианту устно.

Первый способ более приемлемый, так как при разборе заданий позволяет более глубоко и всесторонне систематизировать пройденный материал. Разобрать решения заданий следует сразу после выполнения тестов с активным привлечением учащихся.

При использовании в учебном процессе рабочей тетради ее можно использовать как конспект темы и просмотреть решение опорных задач. Поскольку в рабочей тетради по каждому пункту темы дано избыточное число задач, то из не решенных в процессе изучения темы задач можно сделать подборку для урока повторения.

3°. Контрольная работа рассчитана на один урок (45 минут). В контрольной работе первые четыре задачи – это задачи с выбором ответа и со свободным ответом. Надо напомнить учащимся, что делать запись решения этих задач не следует. Такую запись можно делать на черновиках, но их сдавать на проверку не надо. В задачах 5 и 6 решение записывается полностью с краткой записью условия.

4°. На последнем уроке данной темы на дом следует задать повторение материала, связанного со свойствами измерения отрезков (вопрос 7 из § 1, 7 класс).

Контрольная работа по теме «Многоугольники»

1-й вариант

1. Сторона правильного треугольника равна $4\sqrt{3}$ см. Найдите радиус вписанной в него окружности.

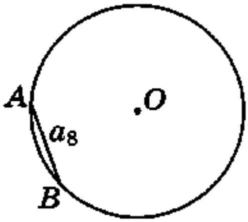
Ответ: а) 4 см; б) 2 см; в) $2\sqrt{3}$ см.

2. Сколько вершин имеет правильный многоугольник, если каждый из его внешних углов равен 24°?

Ответ: ______________________________

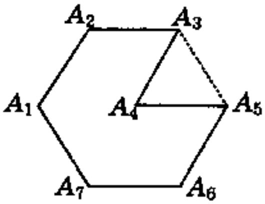
3. Определите центральный угол правильного n-угольника, если его сторона 6 см, а радиус вписанной окружности $3\sqrt{3}$ см.

Ответ: ______________________________

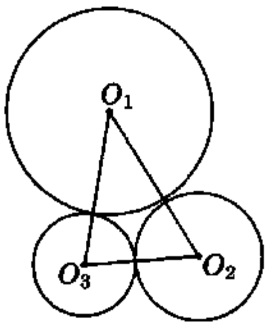


4. В окружности с радиусом 5 см хорда AB является стороной правильного восьмиугольника. Найдите длину меньшей дуги, стягиваемой этой хордой.

Ответ: 1. $\frac{5\pi}{2}$ см; 2. $\frac{5\pi}{4}$ см; 3. $\frac{10\pi}{3}$ см; 4. $\frac{5\pi}{3}$ см.



5. Треугольник $A_3A_4A_5$ – равносторонний и его периметр равен 21см. Найдите периметр многоугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$, если периметр шестиугольника $A_1A_2A_3A_5A_6A_7$ в два раза больше периметра равностороннего треугольника $A_3A_4A_5$.



6. Три окружности с радиусами 1 см, 2 см и 3 см попарно касаются друг друга. Найдите длину окружности, проходящей через центры данных окружностей.

2-й вариант

1. Сторона правильного шестиугольника равна 7 см. Найдите радиус вписанной в него окружности.

Ответ: а) 7см; б) $3{,}5\sqrt{3}$ см; в) $7\sqrt{3}$ см.

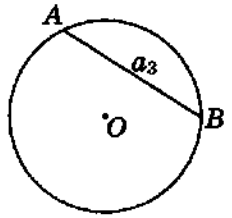
2. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый из его внутренних углов равен $165°$?

Ответ: ______________________________

3. Определите центральный угол правильного вписанного n-угольника, если его сторона 2 см, а радиус описанной окружности $\sqrt{2}$ см.

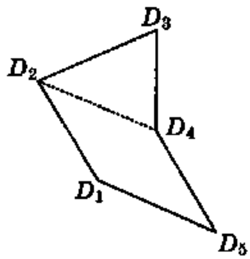
Ответ: ______________________________

4. В окружности с радиусом 5 см хорда AB является стороной правильного треугольника. Найдите длину меньшей дуги, стягиваемой этой хордой.

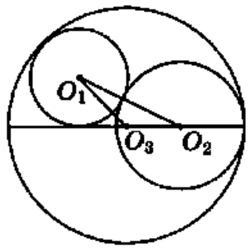


Ответ: 1. $\frac{5\pi}{2}$; 2. $\frac{5\pi}{3}$ см; 3. $\frac{10\pi}{3}$ см; 4. $\frac{5\pi}{4}$ см.

5. Треугольник $D_2D_3D_4$ – равносторонний и его периметр равен 21 см. Найдите периметр пятиугольника $D_1D_2D_3D_4D_5$, если периметр четырехугольника $D_1D_2D_4D_5$ в два раза больше периметра равностороннего треугольника $D_2D_3D_4$.



6. Три окружности с радиусами 4 см, 6 см и 12 см попарно касаются друг друга. Найдите длину окружности, проходящей через центры данных окружностей.



§ 14. ПЛОЩАДИ ФИГУР

В этом параграфе изучаются: основные свойства площади, вывод формул площадей плоских фигур.

С понятием площади и формулой для вычисления площади прямоугольника в случае, когда длины сторон – натуральные числа, учащиеся познакомились в начальной школе; в 5–6 классах они приобрели некоторый навык ее применения. Теперь эта формула будет доказана для общего случая, на ее основе выводится формула площади параллелограмма, которая используется при выводе формул площади треугольника и трапеции.

В ходе изучения темы у учащихся формируется представление о площади многоугольника как о некоторой величине, характеризующей фигуру. Понятие площади вводится с указанием ее свойств и с опорой на наглядные представления и жизненный опыт учащихся. Здесь же вводится очень важное в геометрии понятие равновеликости, которое вносит существенный вклад в логическое развитие учащихся. Во-первых, упрощается решение многих задач с его применением; во-вторых, углубляются общие представления учащихся о методологических основах геометрии.

Основное внимание уделяется решению задач, что не только позволяет расширить представления учащихся об аналитических методах решения геометрических задач, но и играет важную роль в осуществлении внутрипредметных связей.

В данном курсе планиметрии понятие площади и формулы площадей конкретных плоских фигур не только позволяют решать многие задачи на вычисления, но применять их при решении задач на доказательство и построения.

Вычисление площадей многоугольников является составной частью задач на многогранники в курсе стереометрии. Поэтому основное внимание уделяется формированию практических навыков вычисления площадей многоугольников в ходе решения задач.

При выводе формулы площади круга неявно, на уровне наглядных представлений, совершается предельный переход от площадей правильных вписанных и описанных n-угольников к площади круга. Наряду с площадью круга рассматриваются также площади кругового сектора и кругового сегмента.

Планируемые итоговые результаты изучения § 14. Учащиеся должны научиться:

– *иллюстрировать и объяснять* основные свойства площади, понятие равновеликости;

– *выводить формулы* площади треугольника и четырехугольников: прямоугольника, у которого длины сторон выражаются рациональными числами, параллелограмма, ромба, трапеции;

– *объяснять* формулу площади круга, опираясь на наглядные представления;

– *формулировать, иллюстрировать и объяснять* отношения площадей подобных фигур;

– *вычислять* площади фигур непосредственно применяя формулы площади;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- основные свойства площади;
- понятие равновеликости;
- формулы площади треугольника и четырехугольников: прямоугольника, параллелограмма, трапеции, круга, кругового сектора и кругового сегмента;
- теорему об отношении площадей подобных фигур.

Учащиеся получат возможность научиться:

– применять метод площадей при решении задач на вычисления и доказательство.

Понятие площади. Площадь прямоугольника

Комментарий для учителя

Введение *свойств измерения площадей* полезно проводить с одновременным повторением формулировок *свойств измерения отрезков*. В ходе изучения пункта «Понятие площади» у учащихся должно сформироваться представление о том, что свойства измерения отрезков и свойства измерения площади аналогичны.

Уровень сложности вывода формулы для вычисления площади прямоугольника для общего случая превышает уровень сложности учебного материала, определяемого «Примерными программами основного общего образования», однако его появление вызвано объективными требованиями строгости обоснования утверждений. Поэтому вышесказанное позволяет рекомендовать материал пункта «Площадь прямоугольника» дать в обзорном плане в виде фрагмента лекции на уроке. При этом воспроизведения ее доказательства от учащихся можно не требовать.

Текущие результаты изучения пунктов 123 и 124. Учащиеся должны научиться:

– *формулировать, иллюстрировать и объяснять* основные свойства площади;

– *выводить* формулу площади прямоугольника, у которого длины сторон выражаются рациональными числами;

– *вычислять* площадь прямоугольника, непосредственно применяя формулу площади;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

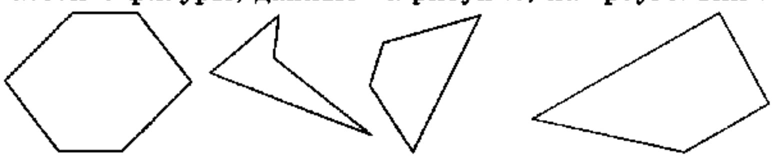
- основные свойства площади;
- формулу площади прямоугольника.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Материал, представленный в данных двух пунктах, сложен для восприятия учащимися, поэтому оптимальным методом его подачи является лекция, прерываемая краткими беседами с учащимися. Однако весь материал этих пунктов рекомендуется полностью изложить учителю самому. Можно предложить примерный план изложения.

$\boxed{1.}$ *Определение простой фигуры* достаточно проиллюстрировать рисунком, на котором изображены области, ограниченные треугольником, параллелограммом, трапецией, произвольным многоугольником (рис. 91), и предложить учащимся разбить эти области на треугольники.

Разбейте фигуры, данные на рисунке, на треугольники.



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 91

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку определения простой фигуры и выполнить упражнение 142.

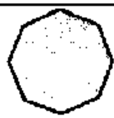
$\boxed{2.}$ Полезно привести ряд примеров, связанных с практической необходимостью измерения площадей. Площадь зеркала водохранилища нужно знать его проектировщикам, в частности, чтобы определить, как станет испаряться из заполненного водохранилища вода. Площадь поверхности стен в помещении нужно знать, чтобы рассчитать количество краски, обоев или кафеля. Площадь поля необходимо знать для определения количества семян для посева. Площадь поверхности дороги нужно знать, например, при расчете необходимого для ее покрытия количества асфальта. Однако следует заметить, что непосредственное измерение площадей практически невозможно, поэтому пользуются формулами для вычисления площадей.

$\boxed{3.}$ Из курса математики 1–6 классов учащимся известно понятие *площади*, поэтому достаточно ввести определение площади и ее свойства, а затем закрепить их.

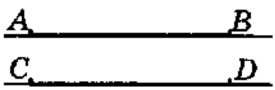
Введение *свойств измерения площадей* полезно проводить с одновременным повторением формулировок *свойств измерения отрезков*, сделав при этом рисунок и соответствующую запись на доске (рис. 92). Видимые из рисунков аналогии помогают более глубокому усвоению изучаемого материала. По рисунку 92 можно изготовить плакат.

Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля.

$AB > 0$



Каждый многоугольник имеет определенную площадь $S > 0$

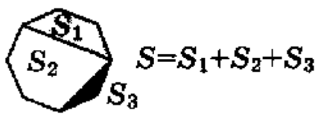


Равные отрезки имеют равные длины

Равные многоугольники имеют равные площади

Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой

$AB = AC + CB$



Если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников

Рис. 92

После введения *свойств площади* полезно фронтально решить следующие задачи и на их решении показать применение *свойств площади*.

1. Докажите, что диагональ параллелограмма делит его на два треугольника, площади которых равны.

2. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M симметрична точке D относительно точки C (рис. 93). Докажите, что $S_{ABCD} = S_{AMD}$.

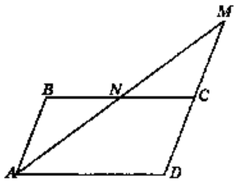


Рис.93

$\boxed{4.}$ После введения третьего свойства «*площадь квадрата равна квадрату его стороны*» полезно напомнить, что можно измерить любой отрезок, выбрав единицу измерения, т. е. выразить его длину некоторым положительным числом. Аналогично измеряется площадь. При этом за единицу измерения выбирается квадрат со стороной, равной выбранной единице измерения длины, т.е. если за единицу измерения выбран сантиметр, то единицей измерения площади будет квадратный сантиметр, и т.д. (рис. 94).

длина	площадь
см	см^2
мм	мм^2
м	м^2

Рис. 94

Площадь так же, как и длина отрезка, всегда выражается положительным числом.

После введения третьего свойства площади полезно устно выполнить следующие упражнения:

1. Как изменится площадь квадрата, сторона которого равна 3 см, если каждую его сторону: а) увеличить в два раза; в) уменьшить в два раза?

2. Как изменится сторона квадрата, если его площадь: а) увеличить в 16 раз; б) уменьшить в 9 раз?

В задачах параграфа будут использоваться известные из курса математики 1–6 классов учащимся единицы измерения площадей, полезно вспомнить некоторые из них в ходе решения следующей задачи.

Площадь поверхности озера равна 5 870 000 м^2. Выразите площадь поверхности озера в квадратных километрах и гектарах.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулировку понятия площади и свойства площади. *Затем разобрать по тексту рабочей тетради решение задачи 143 и выполнить по аналогии задачу 144. Затем выполнить упражнения 145–147.*

$\boxed{5.}$ Доказательство *формулы площади прямоугольника рекомендуется провести по тексту учебника*. После вывода *формулы площади прямоугольника* решить задачу 7 из учебника.

2°. В задаче 2 речь идет о понятии равновеликих фигур, которое будет введено в пункте 127. Поэтому решение задачи следует отложить до изучения этой темы.

Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пунктов 123 и 124, решить задачу 7; дома – вопросы для повторения 1, 2; задачи 1, 3 и 4; повторить определения параллелограмма, прямоугольника, ромба и их свойства (вопросы 6–13).

Дополнительные задачи

1. Докажите, что диагональ параллелограмма разбивает его на два треугольника равной площади. (Решить устно.)

2. Сторона квадрата 10 см. Как изменится площадь квадрата, если каждую его сторону уменьшить: 1) в 2 раза; 2) в 5 раз; 3) в n раз? (Решить устно.)

3. Сторона квадрата 6 см. Как изменится его сторона, если его площадь уменьшилась: 1) в 4 раза; 2) в 9 раз? (Решить устно.)

4. Дан прямоугольник. Как изменится его площадь, если: 1) обе стороны увеличить в 3 раза; 2) обе стороны уменьшить в 4 раза; 3) одну сторону уменьшить в 2 раза, а другую увеличить в 4 раза? (Решить устно.)

5. Земельный участок имеет площадь 2 700 000 м^2. Чему равна площадь этого участка, если за единицу измерения принять: 1) квадратный километр; 2) гектар; 3) ар?

6. Стороны двух квадратов равны 8 см и 16 см. Найдите сторону квадрата, площадь которого равна сумме площадей данных квадратов.

7. Определите площадь квадрата, если его диагональ равна 6 см.

8. Определите стороны прямоугольника, если его периметр 108 см, а площадь 200 см^2.

9. (Практическая работа.) Вырежьте из бумаги два равных прямоугольных треугольника и составьте из них: 1) равнобедренный треугольник; 2) прямоугольник; 3) параллелограмм, не являющийся прямоугольником. Объясните, почему площади всех полученных фигур равны между собой.

10. (Практическая работа.) Вырежьте из бумаги два равных прямоугольника, у каждого из которых одна сторона вдвое больше другой. Один из них разрежьте на две части так, чтобы из них можно было составить прямоугольный треугольник. Другой разрежьте на три части так, чтобы из них можно было составить квадрат (рис. 104 и 105).

Площадь параллелограмма. Площадь треугольника

Комментарий для учителя

В пунктах 125 и 126 традиционными методами, т.е. с опорой на формулу площади прямоугольника, выводятся формулы для вычисления площадей параллелограмма и треугольника. Здесь же доказывается справедливость еще нескольких формул для вычисления площади треугольника: через две стороны и угол между ними, формула Герона.

При выводе формулы Герона вычисления площади треугольника используются достаточно сложные алгебраические выкладки, поэтому можно рекомендовать формулу Герона дать в виде фрагмента лекции и не требовать от учащихся воспроизведения ее доказательства.

Текущие результаты изучения пунктов 125 и 126. Учащиеся должны научиться:

– *выводить* формулы площади параллелограмма и треугольника;

– *вычислять* площадь параллелограмма треугольника, непосредственно применяя формулы площади;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- формулы площади треугольника, параллелограмма, ромба, трапеции и произвольного четырехугольника;
- алгебраический аппарат;
- тригонометрический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Доказательство формулы площади параллелограмма полезно провести в форме беседы. При этом, воспроизведя рисунок 299 из учебника на доске (рис. 95), можно задать следующие вопросы:

1. Почему треугольники AEC и BFD равны?

[По катету и гипотенузе $AE = BF$, $AC = BD$].

2. Каким свойством обладают площади равных фигур?

[По второму свойству площадей равные фигуры имеют равные площади $S_{\Delta AEC} = S_{\Delta BFD}$.]

3. Почему площадь прямоугольника $EABF$ равна площади параллелограмма $ABDC$?

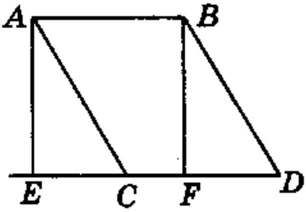


Рис. 95

[$S_{EABF} = S_{ABFC} + S_{\Delta EAC}$; $S_{ABDC} = S_{ABFC} + S_{\Delta FBD}$; отсюда $S_{ABCD} = S_{EABF} = AB \cdot BF = ah$].

На непосредственное применение формулы площади параллелограмма можно порекомендовать фронтально с классом решить задачи:

1. Найдите площадь параллелограмма, если одна из его сторон 6 см, а высота, проведенная к этой стороне, 3 см.
2. Стороны параллелограмма 4 см и 6 см. Меньшая его высота равна 3 см. Вычислите вторую высоту.
3. Докажите, что стороны параллелограмма обратно пропорциональны соответствующим высотам.

2°. Вывод формулы *для вычисления площади треугольника через его основание и высоту*, как всегда, начинается с ее словесной формулировки: «*площадь треугольника равна половине произведения его стороны на проведенную к ней высоту*» чертежа по условию (рис. 96) и краткой записи.

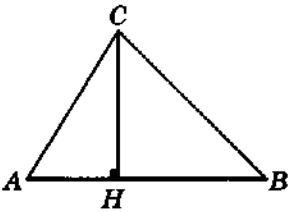


Рис. 96

Дано: ΔABC; $CH \perp AB$;
$AB = a$, $CH = h$.

Доказать: $S_{ABC} = \dfrac{1}{2} AC \cdot BH$.

При выводе формулы площади треугольника к доказательству равенства треугольников ABC и CDA (рис. 300 из учебника § 14) можно привлечь учащихся.

В качестве упражнений на закрепление и отработку умения применять формулу площади треугольника можно порекомендовать заранее приготовить таблицу, приведенную на рисунке 97, и заполнить ее вместе с учащимися.

a	h	S
7	6	
9		63
	3	18

Рис. 97

После этого полезно задать учащимися вопрос и решить задачу:

1. Чему равна площадь прямоугольного треугольника, если известны его катеты?

2. Найдите площадь прямоугольного треугольника с катетами 8 см и 3 см.

Из решения задачи 21 из учебника получаем формулу для вычисления площади равностороннего треугольника.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради предложить учащимся записать словесную формулировку площади треугольника и формулу площади треугольника. Затем следует предложить учащимся заполнить таблицу, приведенную выше, решить задачи 155–157. Запись в тетради полностью повторяет ход урока, предложенный выше.

3°. Вывод формулы *для вычисления площади треугольника по двум его сторонам и углу между ними*, как всегда, начинается с ее словесной формулировки: «*Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними*», чертежа по условию (рис. 98) и краткой записи.

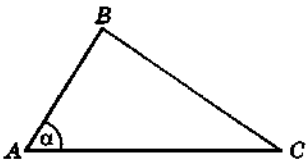


Рис. 98

Дано: ΔABC;
$AB = a$, $AC = b$, $\angle BAC = \alpha$

Доказать: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB AC \sin\alpha = \frac{1}{2} ab\sin\alpha$.

При выводе формулы площади треугольника к выражению высоты треугольника ABC через его сторону AB и угол α (рис. 301 из учебника § 14) можно привлечь учащихся. Формула площади треугольника $S = \frac{1}{2} ab\sin\alpha$ находит широкое применение при решении задач.

На применение полученной формулы можно предложить учащимся выполнить устно по готовому чертежу следующее упражнение:

Найдите площадь треугольника, если одна из его сторон a, а другая b, а угол между ними α, причем: а) $a = 4$ см, $b = 6$ см, $\alpha = 30°$; б) $a = 12$ м, $b = 5$ м, $\alpha = 60°$.

Можно предложить учащимся задачи 27, 28 из учебника.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать словесную формулировку площади треугольника по двум его сторонам и углу между ними и ее формулу. Затем решить задачу 158. Запись в тетради полностью повторяет ход урока, предложенный *выше. Из других задач, предложенных в рабочей тетради, полезно решить одну из задач 159 или 160. Задача 162 позволяет вывести формулу для вычисления площади параллелограмма по двум его сторонам и углу между ними.*

4°. Вывод формулы Герона основывается на формуле площади треугольника $S = \frac{1}{2} \cdot ab\sin\gamma$, теореме косинусов и основном тригонометрическом тождестве. Вывод формулы Герона рекомендуется провести в виде фрагмента лекции учителем без привлечения учащихся.

На непосредственное применение формулы Герона рекомендуется решить задачи 29 1) и 2) и 34 из учебника.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради предложить учащимся записать формулу Герона. Затем решить задачу 165, которая является задачей 29 из учебника. Затем решить задачи 166 и 167, которые аналогичны задачам учебника.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пункта 125 и классическую формулу площади треугольника из пункта 126, решить задачи 13, 19, 21, дома – вопросы 3 и 4; повторить вопрос 10, 11 из § 7 и вопрос 2 из § 12, задачи 12, 20, 22.

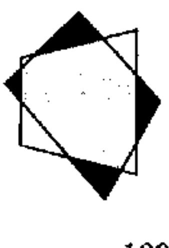
На втором уроке в классе рассмотреть весь оставшийся теоретический материал пункта 126, решить задачи 25, 28, 29 1) и 2) и 34; дома – вопрос 5, задачи 27, 29 5), 33.

На третьем уроке в классе – провести самостоятельную работу, решить задачи 23, 30, 35 1) и 3); дома – задачи 24, 26, 35 2) и 4).

Самостоятельная работа по темам «Площадь параллелограмма» и «Площадь треугольника»

Самостоятельная работа содержит четыре задачи: первая и третья с выбором ответа, а две другие со свободным ответом.

1-й вариант

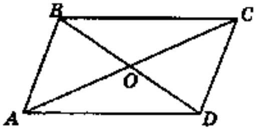


1. Два равных по площади четырехугольника расположены, как показано на рисунке. Пусть сумма площадей черных треугольников равна S_1, а сумма площадей белых треугольников равна S_2. Сравните эти суммы площадей.

Ответ: а) $S_1 < S_2$; б) $S_1 = S_2$; в) $S_1 > S_2$.

2. Найдите площадь ромба, если его диагонали равны 4 см и 6 см.

Ответ: 1. 24 см^2; 2. 12 см^2; 3. 6 см^2; 4. 48 см^2.



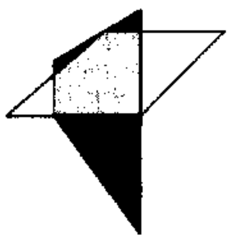
3. Диагонали параллелограмма, равные 6 см и 14 см, пересекаются под углом 60°. Найдите площадь параллелограмма.

Ответ: ____________________

4. Найдите площадь треугольника по трем сторонам: 10, 13 и 13.

Ответ: ____________________

2-й вариант

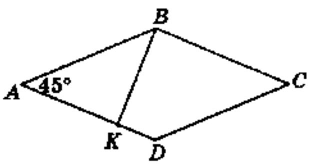


1. Два равных по площади четырехугольника расположены, как показано на рисунке. Пусть сумма площадей черных треугольников равна S_1, а сумма площадей белых треугольников равна S_2. Сравните эти суммы площадей.

Ответ: а) $S_1 < S_2$; б) $S_1 = S_2$; в) $S_1 > S_2$.

2. Диагональ квадрата равна 14 см. Найдите его площадь.

Ответ: 1. 24,5 см^2; 2. 98 см^2; 3. 196 см^2; 4. 49 см^2.



3. В ромбе $ABCD$ проведена высота BK, равная $5\sqrt{2}$ см. Найдите площадь ромба, если угол BAD равен 45°.

Ответ: ____________________

4. Найдите площадь треугольника по трем сторонам: 11, 13 и 20.

Ответ: ____________________

Указания к задачам

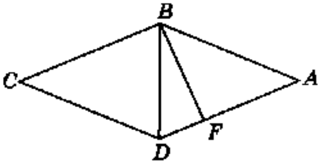


Рис. 99

12. В ромбе $ABCD$ $\angle BDA = \varphi$, $AB = a$, $BF = 12$ см – высота. В треугольнике BDF $DF = 5$ см; $\sin\varphi = \frac{BF}{BD} = \frac{12}{13}$; $\cos\varphi = \frac{DF}{BD} = \frac{5}{13}$; $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi = 2\frac{12}{13}\cdot\frac{5}{13} = \frac{120}{169}$. $\angle BAD = 180° - \angle CDA$, $\sin\angle BAD = \sin\angle CDA$.

Из треугольника BFA $\sin\angle BAF = \frac{12}{a}$, отсюда $\frac{12}{a} = \frac{120}{169}$, $a = 16{,}9$. $S_{ABCD} = a^2\sin A = 202{,}8$ (см^2).

13. Эта задача является опорной; ее результат используется при решении других задач. Диагонали ромба делят его на четыре равных треугольника, площадь каждого из них равна $\frac{1}{2}\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2}$, площадь ромба равна $4\frac{1}{2}\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d_2}{2} = \frac{d_1 d_2}{2}$.

23. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, является средним пропорциональным между отрезками гипотенузы, на которые ее делит основание высоты $h = \sqrt{32\cdot 18} = 24$, $S = \frac{1}{2}24\cdot 50 = 600$ (см^2).

25. $S = \frac{1}{2}ab\sin C$ принимает наибольшее значение, когда $\sin C = 1$, т. е. $\angle C = 90°$.

После решения задачи полезно подчеркнуть, что среди всех равнобедренных треугольников с заданной боковой стороной наибольшую площадь имеет прямоугольный треугольник.

28. Определим третий угол треугольника $\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$, затем по теореме синусов найдем еще одну сторону треугольника и применим формулу площади треугольника по двум его сторонам и углу между ними.

35. Наименьшей высотой треугольника является та, которая опускается на наибольшую сторону. Поскольку площадь данного треугольника постоянна и не зависит от способа ее вычисления, то его основание и высота являются величинами обратно пропорциональными. Составляются два выражения площади треугольника (по формуле Герона и по формуле через основание и высоту). Приравнивая их, получаем уравнение относительно искомой высоты треугольника. Наибольшей высотой треугольника является та, которая опущена на наименьшую сторону. Уравнения составляются аналогично.

Дополнительные задачи

1. Стороны параллелограмма 4 см и 6 см. Меньшая его высота равна 3 см. Вычислите вторую высоту.
2. Докажите, что стороны параллелограмма обратно пропорциональны соответствующим высотам.
3. Найдите площадь ромба со стороной 12 см и тупым углом, равным 150°.
4. В ромбе $ABCD$ со стороной, равной 5 см, угол между стороной и диагональю равен 30°. Найдите площадь ромба.
5. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 6 см, а угол при основании – 45 °. Найдите площадь треугольника. (Решите двумя способами.)
6. Докажите, что площадь параллелограмма $S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin\angle BAD$.
7. Определите сторону параллелограмма, если другая его сторона 5 см, площадь его 10 см^2 и один из углов 30°.
8. В равнобедренном треугольнике ABC с углом при вершине α длина основания равна a см. Найдите площадь треугольника.
9. В треугольнике со сторонами 30 см, 25 см и 11 см найдите длину высоты, проведенной из вершины меньшего угла.
10. Треугольник ABC, стороны которого 13 см; 14 см и 15 см, разбит на три треугольника отрезками, соединяющими точку пересечения медиан M с вершинами треугольника. Найдите площадь треугольника BMC.

Равновеликие фигуры

Комментарий для учителя

Одной из специфических целей обучения геометрии или тех целей, которые должны реализоваться при обучении геометрии, наиболее эффективным является прежде всего формирование и развитие пространственных представлений (развитие геометрической интуиции). Представленный в пункте 127 материал направлен на усиление линии пространственных представлений, способствует развитию умения исследовать чертеж, видеть возможности его изменения в соответствии с условием задачи.

В процессе изучения курса планиметрии учащиеся уже встречались с равновеликими фигурами в формулировках задач к пунктам 124 и 125. Понятие *«равносоставленные фигуры»*

использовалось при выводе формулы площади параллелограмма. Задачи на равновеликость и равносоставленность фигур не имеют универсального метода решения, поэтому при их решении учащиеся могут в полной мере проявить свою интуицию и способность к творческому мышлению.

Текущие результаты изучения пункта 127. Учащиеся должны научиться:

– *формулировать, иллюстрировать и объяснять* понятия равновеликости и равносоставленности;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- **понятия равновеликости и равносоставленности.**

Методические рекомендации к изучению материала

1°. В начале занятия следует дать определения равновеликих и равносоставленных фигур.

Равновеликие фигуры – плоские фигуры одинаковой площади.

Равносоставленные фигуры – фигуры, которые можно разрезать на одинаковое число соответственно равных частей.

Рассмотрим задачи, которые, по сути, являются составляющими вывода формул площадей для параллелограмма, треугольника, трапеции.

> Нарисуйте параллелограмм. Покажите, на какие две части нужно его разрезать, чтобы затем сложить из них прямоугольник.

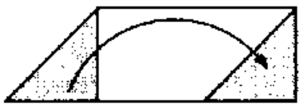


Рис. 100

Решение задачи (рис. 100) было использовано при выводе формулы площади для параллелограмма.

> 1. Покажите, на какие две части нужно разрезать трапецию, чтобы затем сложить из них треугольник.
>
> 2. Покажите, на какие части нужно разрезать трапецию, чтобы затем сложить из них прямоугольник.

Решение задач 1 и 2 представлено на рисунках 101 и 102.

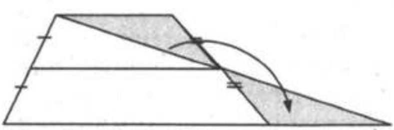


Рис. 101

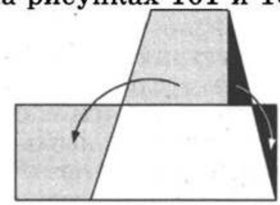
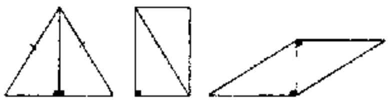


Рис. 102

Следующие задачи аналогичны вышеприведенным, и их можно предложить учащимся для самостоятельного решения.


а) б) в)
Рис. 103

Разрежьте равнобедренный треугольник на такие две части, чтобы затем сложить из них: а) прямоугольник; б) параллелограмм.

Решение задачи понятно из рисунков 103 а), б) и в).

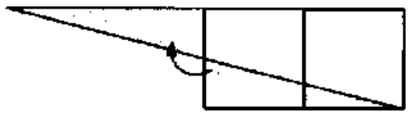


Рис. 104

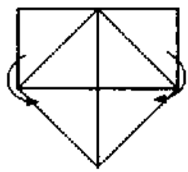


Рис. 105

Нарисуйте прямоугольник, у которого одна сторона в два раза больше другой.

а) Покажите, на какие две части нужно его разрезать, чтобы затем сложить из них прямоугольный треугольник.

б) Покажите, на какие три части нужно его разрезать, чтобы затем сложить из них квадрат.

Решение задачи понятно из рисунков 104 и 105.

Решить задачу 1 из дополнительных задач методического пособия, затем решить задачу 15 из учебника и задачу 2 из дополнительных задач методического пособия. Эти задачи, решенные в заданной последовательности, способствуют лучшему пониманию равновеликости и равносоставленности фигур.

В пунктах 2° и 3° приведен дополнительный материал и учитель решает, нужен этот материал ему на уроке или нет.

2°. Небольшая историческая справка.

Задачи на разрезание или на равносоставленность возникли в глубокой древности. Уже в VII – V вв. до н. э. в Индии в книге «Правила веревки» рассматриваются задачи: даны два квадрата, составьте из них равновеликий квадрат; и дан прямоугольник, составьте из него равновеликий квадрат. Позднее, примерно во II в. до н.э. в «Началах Евклида» приводится решение тех же задач, но уже с использованием метрических отношений в прямоугольном треугольнике. Первый трактат, в котором исследуются способы решения задач на равносоставленность, написал знаменитый арабский астроном и математик из Хорасана Абу аль-Вефа (940 – 998).

Обычно понятие равносоставленности применяется только к многоугольникам и многогранникам. Равносоставленные фигу-

ры являются равновеликими. Венгерский математик Я. Больяй в 1832 г. и немецкий математик П. Гервин в 1833 г. доказали, что равновеликие многоугольники являются равносоставленными (теорема Больяй – Гервина). Поэтому разрезанием на части и перекладыванием их можно любой многоугольник превратить в равновеликий ему квадрат. Естественно, возникает вопрос: верно ли, что равновеликие многогранники являются равносоставленными? Сформулированный вопрос является третьей проблемой Гильберта.

В начале XX в. благодаря бурному росту периодических изданий решение задач на разрезание фигур на то или иное число частей и последующее составление из них новой фигуры привлекает внимание как средство развлечения. Известными специалистами в этой области были знаменитые классики занимательной геометрии и составители головоломок Генри Э. Дьюдени и Гарри Линдгрен.

3°. Геометрический софизм.

Далее рассмотрим задачу на разрезание из серии математических софизмов (парадоксов). *Софизмом называется умозаключение или рассуждение, обосновывающее заведомую нелепость, абсурд или парадоксальное утверждение.* В математических софизмах, как правило, не учитываются условия применения теорем, формул или правил. В геометрических софизмах обычно используется ошибочный чертеж или кажущиеся «очевидности».

Квадрат 8×8 разрезан на четыре части, как показано на рисунке 106. Из полученных частей составлен прямоугольник 13×5 (рис. 107). Площадь прямоугольника равна 65, а площадь квадрата – 64. Объясните, где ошибка.

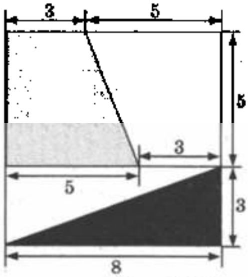


Рис. 106

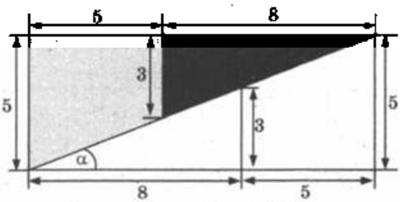


Рис. 107

Как следует из рисунка 105, квадрат разрезан на две трапеции (белая и серая) и два прямоугольных треугольника (белый и серый).

Рассмотрим на рисунке 107 большой белый прямоугольный треугольник и найдем значение тангенса угла α: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{5}{13} = 0{,}385$. Теперь рассмотрим маленький белый треугольник на рисунке

107 и найдем значение тангенса угла α: $\mathrm{tg}\alpha = \dfrac{3}{8} = 0{,}375$. Значения тангенсов угла α не совпадают. Это означает, что гипотенуза маленького белого прямоугольного треугольника и боковая сторона белой трапеции не лежат на одной прямой, а являются звеньями ломаной.

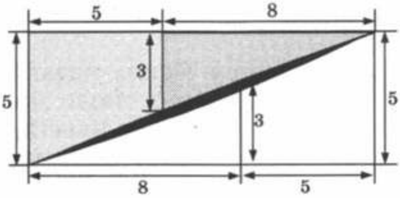


Рис. 108

Аналогично доказывается, что гипотенуза маленького серого прямоугольного треугольника и боковая сторона серой трапеции не лежат на одной прямой. Следовательно, площадь прямоугольника равна сумме площадей фигуры, составленной из частей квадрата и черной «щели» (рис. 108).

Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пункта 127, решить задачи 15 и 16, дома – вопросы 7 и 8; задачу 36.

Указания к задачам

15. Для решения задачи достаточно основание треугольника *AC* разделить на три равные части и соединить точки деления с вершиной *B* (рис. 109). Треугольники *ABD*, *DBE*, *EBC* равновелики, так как имеют равные основания и общую высоту.

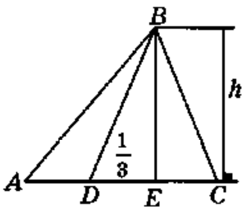


Рис. 109

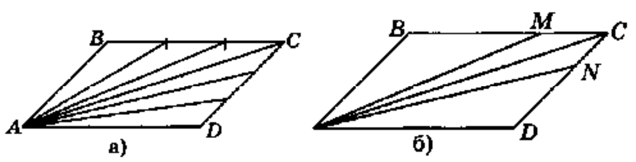


Рис. 110

16. Задача решается с опорой на задачу 15. Проведем в параллелограмме *ABCD* диагональ *AC* (рис. 110); треугольники *ABC* и *ACD* равновелики и составляют $\frac{1}{2}S_{ABCD}$. Каждый из треугольников *ABC* и *ACD* разделим на три равновеликих треугольника. Площадь каждого из шести треугольников равна $\frac{1}{6}S_{ABCD}$. На основе проведенных исследований проводим построение. Делим сторону *CD* в отношении 2 : 1, следуя от вершины *D*, а сторону *BC* в отношении 2 : 1, следуя от вершины

B. Искомыми фигурами являются треугольник *ABM* и *ADN* и четырехугольник *AMCN*, как составленные из равновеликих фигур.

Дополнительные задачи

1. В треугольнике *ABC* проведена медиана *BD*. Докажите, что $S_{ABD} = S_{CBD}$.

2. Разделите данный треугольник на два треугольника, площади которых относятся как 1 : 2.

3. Докажите, что каждая диагональ параллелограмма делит его на два равновеликих треугольника.

4. Каждая диагональ четырехугольника делит его на два равновеликих треугольника. Докажите, что данный четырехугольник – параллелограмм.

5. Диагонали параллелограмма *ABCD* пересекаются в точке *O*. Найдите площадь параллелограмма, если площадь треугольника *AOD* равна 11 см^2.

6. Дан треугольник *ABC* со стороной *AC* = 4 см и высотой *BD* = = 2 см.

а) Найдите площадь треугольника *ABC* и постройте другой треугольник с тем же основанием *AC*, равновеликий данному. Сколько таких треугольников существует?

б) Постройте параллелограмм с основанием *AC*, равновеликий данному треугольнику *ABC*. Сколько таких параллелограммов существует?

[Решение. а) Третья вершина треугольника лежит на прямой, параллельной *AC* и проходящей через точку *B*. Бесконечное множество.

б) Две другие вершины параллелограмма будут расположены на прямой, параллельной *AC* и проходящей через середину высоты *BD*. Бесконечное множество.]

Площадь трапеции

Комментарий для учителя

В пункте 128 традиционными методами, т.е. с опорой на формулу площади треугольника, выводится формула для вычисления площади трапеции. Здесь при решении задачи 40 выводится формула для вычисления площади четырехугольника.

Текущие результаты изучения пунктов 128. Учащиеся должны научиться:

– *выводить* формулу площади трапеции;

– *вычислять* площадь трапеции, непосредственно применяя формулы площади;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- формулу площади трапеции;
- алгебраический аппарат;
- тригонометрический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Вывод формулы *для вычисления площади трапеции*, как всегда, начинается с ее словесной формулировки: «*площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований на высоту*»,чертежа по условию (рис. 111) и краткой записи.

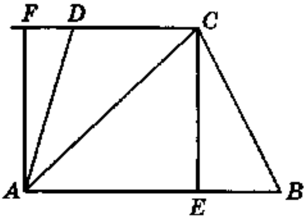


Рис. 111

Дано: $ABCD$ – трапеция;
$AB \parallel DC$, $CE \perp AB$, $AF \perp DC$;
$AB = a$, $CD = b$, $CE = h$.

Доказать: $S_{ABCD} = \dfrac{a+b}{2} \cdot h$.

При выводе формулы площади трапеции к доказательству можно привлечь учащихся.

В ходе обоснования *формулы для вычисления площади трапеции* вводится понятие «высота трапеции». После обоснования этой формулы полезно, напомнив учащимся, что полусумма оснований трапеции равна ее средней линии, сделать вывод, что площадь трапеции равна произведению средней линии на высоту.

Для закрепления формулы площади трапеции можно предложить учащимся устно решить следующую задачу.

Найдите площадь трапеции с основаниями a и b и высотой h, если:

а) $a = 9$ см, $b = 7$ см, $h = 4$ см;

б) $a = 15$ см, $b = 5$ см, $h = 11$ см.

В качестве упражнений на закрепление и отработку умения применять формулу площади трапеции можно порекомендовать фронтально решить задачи 1–3 из дополнительных задач с краткой записью на доске. Затем предложить учащимся самостоятельно разобрать решение задачи 40 и решить задачу 4 из дополнительных задач.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать словесную формулировку площади трапеции и ее формулу. На закрепление формулы площади трапеции полезно предложить учащимся закончить решение задач 180 и 181, решение задач 182 и 183 выполнить с краткой записью решения. Остальные задачи, рекомендованные к этому пункту, можно использовать при повторении.

Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пункта 128, решить задачи 40 и 41, дома – вопрос 6, задачи 37, 38 и 39 из § 14; 13 из § 12.

Указания к задачам

41. Пусть $ABCD$ – произвольный параллелограмм, K – точка пересечения диагоналей, тогда $S_{ABK} = \frac{1}{2}\frac{AC}{2}\cdot\frac{BD}{2}\sin\alpha$, где α – угол между диагоналями. Значение S наибольшее, когда $\sin\alpha = 1$, откуда $\alpha = 90^\circ$. Параллелограмм, угол между диагоналями которого 90°, является ромбом.

Дополнительные задачи

1. Основания трапеции равны 4 см и 7 см, а боковые стороны равны 5 см и 6 см. Вычислите площадь трапеции.

2. Найдите площадь трапеции, основания которой 16 см и 28 см, а диагонали – 17 см и 39 см.

3. Средняя линия трапеции равна 7 см, а ее площадь равна 56 см^2. Найдите высоту трапеции.

4. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны и равны 4 см и 10 см. Найдите площадь этой трапеции.

5. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке F. Докажите, что ΔABF равнобедренный. Найдите площадь четырехугольника $AFCD$, если $\angle BAD = 60^\circ$, $AB = 3$ см, $BC = 5$ см.

6. Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и через точку пересечения продолжений ее боковых сторон, делит основания трапеции пополам.

Формулы для радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника

Комментарий для учителя

В пункте 129 в ходе решения задачи 42 выводятся формулы для радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника: $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$; $R = \dfrac{abc}{4S}$.

Текущие результаты изучения пункта 129. Учащиеся должны научиться:

– *выводить* формулы для радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника;

– *вычислять* радиусы вписанной и описанной окружностей треугольника, непосредственно применяя формулы площади;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- формулу площади трапеции;
- алгебраический аппарат;
- тригонометрический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Вывод формулы *для вычисления* радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника *методом площадей.*

Исследуем условие задачи, сделаем чертеж по условию (рис. 112) и краткую запись.

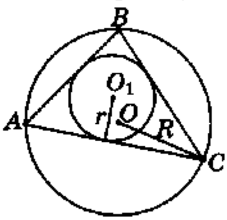


Рис. 112

Дано: ABC – треугольник;
$AB = c$, $BC = a$, CE, $AC = b$;
S – площадь ΔABC;
r – радиус вписанной окружности;
R – радиус описанной окружности.

Доказать: $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$; $R = \dfrac{abc}{4S}$.

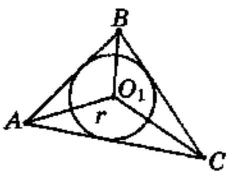


Рис. 113

В выводе формулы $R = \dfrac{abc}{4S}$, *связывающей радиус окружности, описанной около треугольника, с его сторонами и площадью,* используется результат решения задачи 13 из § 12: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$, где α – угол, противолежащий стороне треугольника, равной a.

Вывод формулы $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$, *связывающей радиус окружности, вписанной в треугольник, с его сторонами и площадью,* использует второе свойство площади (рис. 113).

На прямое применение выведенных формул рекомендуется решить задачи 43 2) и 3). Для закрепления формул для радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника – задачу 45.

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулы для вычисления радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника. В задачах, рекомендованных в рабочей тетради к этому пункту, предлагается доказать еще несколько формул вычисления площади треугольника. Эти задачи можно предложить для решения наиболее успевающим учащимся.

Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пункта 129, решить задачи 43 2) и 3), 45 и 47, дома – повторить вопросы 5 – 9 из § 11, задачи 43 1) и 4), задачи 44 и 46.

Указания к задачам

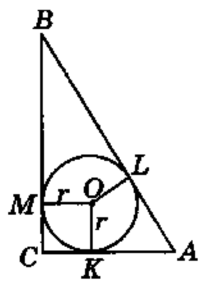


Рис. 114

45. Площадь равнобедренного треугольника находится по формуле Герона

$S = \sqrt{\left(b+\frac{a}{2}\right)\cdot\left(b-\frac{a}{2}\right)\cdot\frac{b}{2}\cdot\frac{b}{2}} = \frac{b}{4}\sqrt{4b^2-a^2}$. Отсюда

$R = \dfrac{b^2}{\sqrt{4a^2-b^2}}$;

$r = \dfrac{2S}{a+b+c} = \dfrac{a}{2}\sqrt{\dfrac{2b-a}{2b+a}}$.

47. Так как окружность – вписанная (рис.114), то $BM = BL$, $CM = CK$, $AL = AK$, $r = CK = CM$; $BC + AC - AB = BM + CM + AK + CK - BL - AL = CM + CK = 2r$.

Дополнительные задачи

1. Докажите, что площадь треугольника выражается формулой $S = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$.

2. Докажите, что площадь треугольника выражается формулой $S = \dfrac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2\sin\alpha}$.

Площади подобных фигур

Комментарий для учителя

В пункте рассматривается зависимость отношения площадей подобных фигур от отношения их линейных размеров. Соответствующее соотношение выводится для простых фигур с использованием метода триангуляции (разбиения фигуры на конечное число треугольников).

Текущие результаты изучения пункта 130. Учащиеся должны научиться:

– *формулировать, иллюстрировать и объяснять* отношение площадей подобных фигур;

– *находить* отношение площадей подобных фигур;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- отношение площадей подобных фигур;
- алгебраический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

Перед изучением материала пункта следует повторить, что *у подобных фигур соответствующие углы равны, соответствующие отрезки пропорциональны*, т.е. у подобных треугольников пропорциональны стороны, высоты и другие элементы.

Поскольку доказательство утверждения «площади подобных фигур относятся как квадраты их соответствующих линейных размеров» опирается на подобие треугольников, то полезно начать изучение материала пункта с решения следующей задачи.

> Треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны, коэффициент подобия равен k. Выразите площадь треугольника $A'B'C'$ через площадь треугольника ABC.

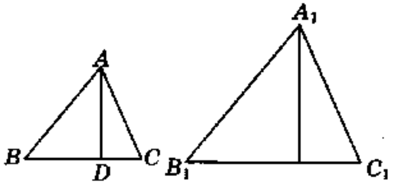


Рис. 115

Дано: $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$;
ΔABC: $BC = a$; $AB = h$;
$\Delta A_1B_1C_1$: $B_1C_1 = ka$; $A_1D_1 = kh$.

Выразить $S_{A_1B_1C_1}$ через S_{ABC}.

Доказательство:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}a\cdot h;\quad S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}ka\cdot kh = k^2\frac{1}{2}a\cdot h = k^2S_{ABC}.$$

При этом если $k > 1$, то площадь треугольника $A_1B_1C_1$ в k^2 раз больше площади треугольника ABC, а если $k < 1$, то площадь треугольника $A_1B_1C_1$ в k^2 раз меньше площади треугольника ABC.

Далее по тексту учебника. Главный вывод из всего текста пункта, который учащиеся должны усвоить:

«Площади подобных фигур относятся как квадраты их соответствующих линейных размеров, что с увеличением (уменьшением) линейных размеров фигуры в k раз ее площадь увеличивается (уменьшается) в k^2 раз».

На прямое применение доказанного утверждения можно предложить учащимся устно решить следующие задачи:

1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. Найдите отношение площадей этих треугольников, если $AB = 2$ см, $A_1B_1 = 6$ см.

2. Трапеции $ABCD$ и $A'B'C'D'$ подобны. Найдите отношение площадей этих трапеций, если $AB = 10$ см, $A_1B_1 = 15$ см.

3. Найдите отношение площадей двух квадратов, если отношение их сторон равно:

1) 1 : 3; 2) 2 : 3; 3) $p : q$.

Примерное планирование изучения материала

На уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пункта 130, решить задачу 51, провести самостоятельную работу; дома – вопрос 10, задачи 50 и 53.

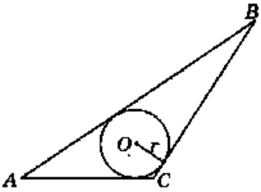
Самостоятельная работа по темам «Формулы для радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника» «Площади подобных фигур»

Самостоятельная работа содержит три задачи: первая и третья с выбором ответа, а вторая со свободным ответом.

1-й вариант

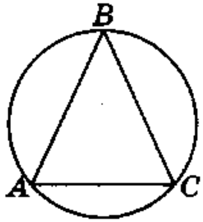
1. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и их сходственные стороны относятся как 3 : 5. Площадь треугольника ABC на 16 см^2 меньше площади треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: ______________________



2. В треугольник ABC, стороны которого равны 25 см, 30 см и 11 см, вписана окружность. Найдите радиус вписанной окружности.

Ответ: 1. 4 см; 2. 8 см; 3. 1 см; 4. 2 см.



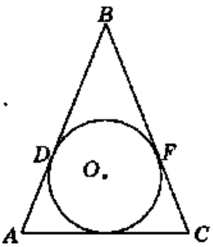
3. Площадь равнобедренного треугольника равна 60 см^2, а основание треугольника равно 10 см. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: ______________________

2-й вариант

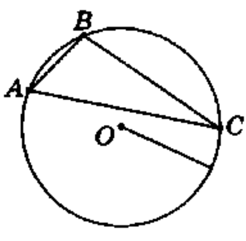
1. Площади подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ относятся как 16 : 25. Периметр треугольника ABC равен 28 см. Найдите периметр треугольника $A_1B_1C_1$.

Ответ: ______________________



2. Площадь равнобедренного треугольника равна $10\sqrt{5}$ см^2, а высота равна 5 см. Найдите радиус вписанной окружности.

Ответ: 1. 1 см; 2. 3 см; 3. 4 см; 4. 2 см.



3. Около треугольника ABC, стороны которого равны 25 см, 30 см и 11 см, описана окружность. Найдите радиус описанной окружности.

Ответ: ______________________

Указания к задачам

50. Так как прямая DF, делящая треугольник ABC на две части (рис. 116), перпендикулярна высоте BH, то она параллельна стороне AC, к которой проведена высота. Значит, треугольники ABC и DBF подобны. По условию $BH_1 = \frac{1}{2}\ BH$, следовательно, $\frac{S_{ABC}}{S_{DBF}} = \left(\frac{BH}{BH_1}\right)^2 = 4$. Отсюда $S_{ABC} = 4S_{DBF}$. Значит, площадь трапеции $ADFC$ равна $S_{ADFC} = 4S_{DBF} - S_{DBF} = 3S_{DBF}$ и $\frac{S_{BDFC}}{S_{DBF}} = 3$.

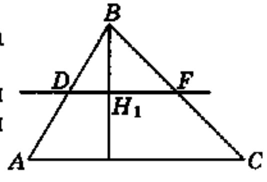


Рис. 116

51. По условию $S_{ADFC} = S_{DBF}$, $BH = h$. Так как прямая DF, делящая треугольник ABC на две части (см. рис. 116), перпендикулярна высоте BH, то она параллельна стороне AC, к которой проведена высота. Значит, треугольники ABC и DBF подобны. $\frac{S_{ABC}}{S_{DBF}} = \left(\frac{BH}{BH_1}\right)^2 = \frac{1}{2}$. По условию $BH = h$, следовательно, $BH_1 = h\sqrt{2}$.

52. Так как даны два правильных n-угольника, то по определению правильных многоугольников каждый из них имеет равные стороны и равные углы. Поскольку каждый из данных многоугольников имеет по n равных углов, то углы одного из данных многоугольников равны углам другого многоугольника (следует из теоремы о сумме углов многоугольника). Значит, данные многоугольники подобны. Следовательно, их площади относятся как $\left(\frac{a}{b}\right)^2$, так как *площади подобных фигур относятся как квадраты их соответствующих линейных размеров*.

Дополнительные задачи

1. Соответствующие стороны подобных многоугольников относятся как 2 : 1. Найдите площадь меньшего многоугольника, если площадь большего равна 36 см^2.
2. Площадь многоугольника равна a кв. ед. Найдите площадь многоугольника, подобного данному, если отношение одной из сторон этого многоугольника к соответствующей стороне данного многоугольника равно $k : p$.
3. Периметр квадрата 12 см. Его площадь относится к площади второго квадрата как 1 : 4. Найдите периметр второго квадрата.

Площадь круга

Комментарий для учителя

В пункте дается определение площади. Изложение ведется с обращением к наглядным представлениям учащихся, при этом неявно используется предельный переход.

В пункте 131 с опорой на наглядные представления учащихся вводится понятие площади произвольной фигуры, на основе которого выводится формула площади круга – фигуры, не являющейся простой. Формальное определение площади круга в учебнике не дается. При этом изученные ранее свойства правильных многоугольников, вписанных в окружность и описанных около окружности, позволяют подготовить учащихся к восприятию площади окружности как наглядного предельного перехода от площади вписанного и описанного n-угольника. При этом предельный переход, естественно, используется в неявном виде.

В этом же пункте рассматриваются площади кругового сектора и кругового сегмента как частей круга.

Текущие результаты изучения пунктов 131. Учащиеся должны научиться:

– *иллюстрировать и формулировать* определения круга, кругового сектора и кругового сегмента;

– *выводить* формулу площади круга, кругового сектора и кругового сегмента;

– *вычислять* площади круга, кругового сектора и кругового сегмента, непосредственно применяя формулы площади;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- формулу площади круга;
- алгебраический аппарат;
- тригонометрический аппарат.

Методические рекомендации к изучению материала

1°. Понятие круга неразрывно связано с понятием окружности. Кроме введенного в учебнике определения круга, можно сформулировать традиционное определение круга: «кругом называется часть плоскости, ограниченная окружностью», хотя это определение не строгое, но очень наглядное. Далее следует обратить внимание учащихся на то, что круг не является простой фигурой и поэтому прежнее определение площади к нему неприменимо. Для определения площади произвольной фигуры S необходимо, чтобы существовали простые фигуры, как содержащие ее, так и содержащиеся в ней. Именно так будем определять площадь круга на основании построения вписанных и описанных правильных n-угольников.

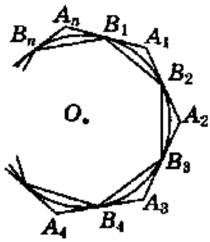


Рис. 117

2°. При выводе формулы площади круга необходимо:

1. Построить описанный $A_1A_2A_3A_4,...A_n$ и вписанный $B_1B_2B_3B_4...B_n$ правильные n-угольники (рис. 117).

2. Площади n-угольников описанного $A_1A_2A_3A_4...A_n$ и вписанного $B_1B_2B_3B_4,...B_n$ можно найти, разбивая их на треугольники.

3. **Площади правильных n-угольников описанный $A_1A_2A_3A_4,\ldots A_n$ и вписанный $B_1B_2B_3B_4,\ldots B_n$ при неограниченном возрастании n стремятся к одному и тому же числу $\frac{lR}{2}$, где l – длина окружности.**

4. Так как $l = 2\pi R$, то $S = \frac{lR}{2} = \pi R^2$. Получили формулу площади круга.

После вывода формулы *площади круга* полезно в ходе устного решения задачи 55 2) провести исследование зависимости *площади круга* от изменения ее радиуса.

На формирование умения применять полученную формулу *площади круга* можно предложить учащимся задачу 54 1).

3°. Определение ***кругового сектора*** полезно сопроводить рисунками, на которых изображены круговые секторы с разной градусной мерой (рис. 118).

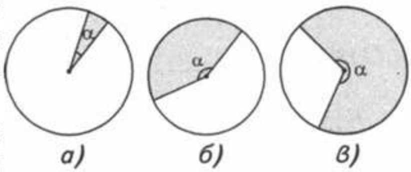


Рис. 118

При выводе формулы площади сектора воспользуемся известным фактом, что градусная мера всей окружности равна 360°. Поэтому площадь сектора, соответствующего центральному углу в 1°, равна $\frac{\pi R^2}{360}$ – площади круга, откуда площадь сектора, соответствующего центральному углу α, равна $\frac{\pi R^2}{360}\alpha$.

После вывода формулы *площади кругового сектора* можно предложить учащимся задачу 59 4).

4°. При рассмотрении формулы площади кругового сегмента полезно обратить внимание учащихся на то, что при $\alpha < 180^\circ$ сегмент является частью соответствующего сектора, а при $\alpha > 180^\circ$ соответствующий сектор является частью заданного сегмента. Это помогает выводу формулы площади кругового сегмента.

На применение полученной формулы полезно решить задачу 62 2).

При использовании в процессе обучения рабочей тетради следует предложить учащимся записать формулы для вычисления площади круга, площади сектора и площади кругового сегмента. На закрепление изученных формул полезно выполнить часть заданий из упражнения 191.

Примерное планирование изучения материала

На первом уроке в классе рассмотреть весь теоретический материал пункта 131, решить задачи 54 1), 55 2), 59 4) и 62 2); дома – вопросы 11 и 12, задачи 54 2), 55 1), 59 2), 3) и 62 1), 3).

На втором уроке в классе решить задачи 57, 60 2), 61, провести самостоятельную работу; дома – задачи 56 3), 58, 60 2).

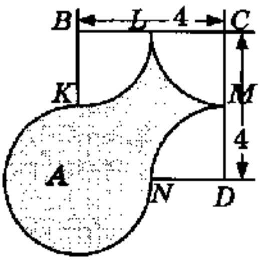
Самостоятельная работа по теме «Площадь круга»

Самостоятельная работа содержит четыре задачи со свободным ответом.

1-й вариант

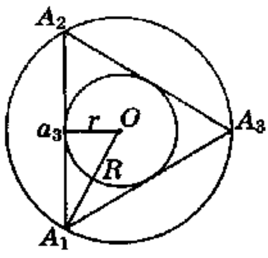
1. Площадь сектора круга, радиус которого 6 см, равна 12π см^2. Найдите соответствующий центральный угол в радианах.

Ответ: ____________________



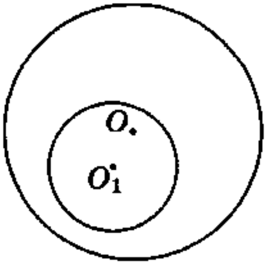
2. По данным рисунка найдите площадь заштрихованной фигуры (KL, LM, MN и KN – дуги окружностей с центрами в вершинах B, C, D и A квадрата $ABCD$).

Ответ: ____________________



3. Площадь кольца, образованного окружностью, описанной около правильного треугольника, и окружностью, вписанной в него, равна π. Найдите сторону треугольника.

Ответ: ____________________



4. (*дополнительная задача*). Внутри круга радиуса R проведена окружность, делящая его на две равновеликие фигуры. Найдите ее радиус.

Ответ: ____________________

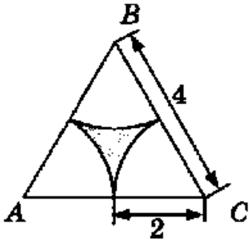
2-й вариант

1. Площадь сектора круга равна $7{,}2\pi$ см^2, а соответствующий центральный угол равен 72°. Найдите радиус окружности.

Ответ: ____________________

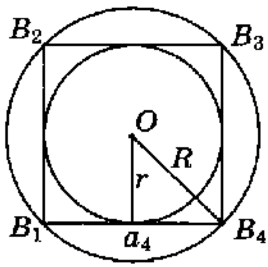
2. По данным рисунка найдите площадь заштрихованной фигуры (точки A, B, C – вершины равностороннего треугольника.

Ответ: ____________________



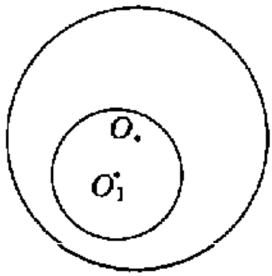
3. Площадь кольца, образованного окружностью, описанной около правильного четырехугольника, и окружностью, вписанной в него, равна π. Найдите сторону четырехугольника.

Ответ: ____________________

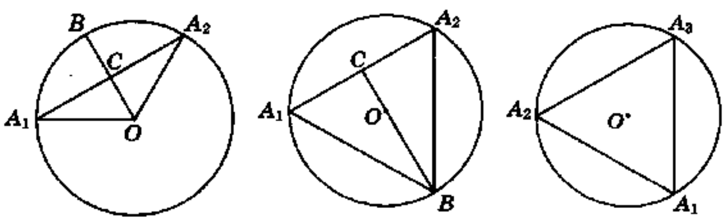


4. (*дополнительная задача*). Внутри круга радиуса a проведена окружность радиуса b, делящая его на две фигуры. Найдите площадь фигуры, ограниченной двумя окружностями, если $a > b$.

Ответ: ____________________



Указания к задачам



а) б) в)

Рис. 119

61. Заметим, что в условии задачи не сказано, какой круговой сегмент, A_1A_2, ограниченный хордой A_1A_2, рассматривается, как на рисунке 119 а) или б). Поэтому вначале необходимо выяснить, что больше – радиус данной окружности или высота кругового сегмента. Заметим, что длина хорды равна длине стороны вписанного правильного треугольника ($a_3 = R\sqrt{3}$), если за радиус описанной окружности принять R. Таким образом, получили, что высота данного в условии задачи кругового сегмента меньше радиуса. Площадь кругового сегмента можно представить как одну треть разности между площадью круга и площадью правильного треугольника, вписанного в данную окружность (рис. 119 в):

$$S = \frac{1}{3}(S_{кр} - S_{A1A2A3}) = \frac{1}{3}(\pi a^2 - \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}) = a^2(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}).$$

Дополнительные задачи

1. Как изменится длина окружности, если радиус увеличится на: 1) 3 см; 2) 20 м; 3) a см?

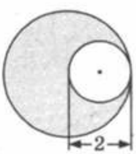


Рис. 120

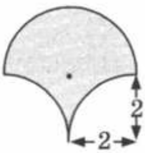


Рис. 121

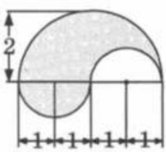


Рис. 122

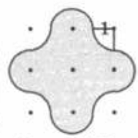


Рис. 123

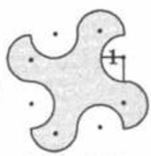


Рис. 124

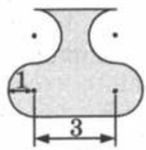


Рис. 125

2. Найдите площади заштрихованных фигур, используя данные рисунков 120–125.

3. На здании МГУ установлены часы с круглым циферблатом, имеющим диаметр примерно 8,8 м. Найдите площадь циферблата этих часов. [Площадь циферблата 60,8 м^2.]

4. В прямоугольном треугольнике катеты равны 8 и 15. Определите радиус описанной окружности.

Систематизация и обобщение знаний по теме «Площади фигур»

Комментарий для учителя

1. В результате систематизации и обобщения знаний по теме «Площади фигур» учащиеся должны:

– *выделять* на чертеже, данном в условии задачи, конфигурации, необходимые для применения определений площадей фигур, свойства площадей и формулы вычисления площадей;

– *выводить* формулы площадей фигур;

– *определять* радиусы описанной и вписанной окружностей через площадь круга;

– *объяснять* отношение площадей подобных фигур;

– *вычислять* площади фигур;

– *применять* при решении задач на вычисления и доказательство:

- определения площадей фигур, свойства площадей;
- формулы площадей фигур;
- формулы, выражающие радиусы описанной и вписанной окружностей через площадь круга;
- понятие отношения площадей подобных фигур;
- тригонометрический аппарат;
- алгебраический аппарат.

2°. Подготовку к контрольной работе по теме «Площади фигур» полезно организовать как урок решения задач. Для этого можно использовать нерешенные задачи из § 14 учебника, в ходе решения которых провести повторение. Кроме того, можно подобрать задачи из разделов «Дополнительные задачи» в зависимости от уровня подготовки класса.

В сборнике тестов Т.М. Мищенко «Геометрия. Тесты. 9 класс» к учебнику А.В. Погорелова издательства «Просвещение» для § 14 «Площади фигур» рекомендованы тесты 10 и 11, направленные на оперативную проверку основных умений, формируемых при изучении этой темы. Каждый тест имеет четыре варианта.

Повторение можно организовать несколькими способами.

Первый способ: итоговый тест по теме можно создать из тестов 7 и 8, используя часть заданий из каждого теста. Следует заметить, что в зависимости от уровня класса можно использовать и более легкие задания тестов или более сложные. Кроме того, полезно разобрать хотя бы одну из десяти задач теста 8, решение которых требует знания формул, связывающих радиус описанной окружности и радиус вписанной окружности со стороной правильного n-угольника и умения их применять.

Второй способ: поскольку тесты не предполагают письменного оформления каждого задания, то можно из каждого теста выполнить по одному варианту устно.

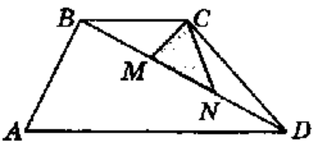
Первый способ более приемлемый, так как при разборе заданий позволяет более глубоко и всесторонне систематизировать пройденный материал. Разобрать решения заданий следует сразу после выполнения тестов с активным привлечением учащихся.

При использовании в учебном процессе рабочей тетради ее можно использовать как конспект темы и просмотреть решение опорных задач. Поскольку в рабочей тетради по каждому пункту темы дано избыточное число задач, то из не решенных в процессе изучения темы задач можно сделать подборку для урока повторения.

3°. Контрольная работа рассчитана на один урок (45 минут). В контрольной работе первые четыре задачи – это задачи с выбором ответа и со свободным ответом. Надо напомнить учащимся, что делать запись решения этих задач не следует. Такую запись можно делать на черновиках, но их сдавать на проверку не надо. В задаче 5 решение записывается полностью с краткой записью условия. В задаче 6 кроме краткой записи условия надо выполнить чертеж.

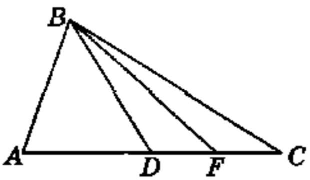
Контрольная работа по теме «Многоугольники»

1-й вариант



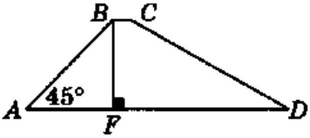
1. В трапеции $ABCD$ ($BC \parallel AD$) точки M и N делят диагональ BD на три равные части. Найдите площадь треугольника MCN, если площадь трапеции равна 27 см^2, а основание AD в два раза больше основания BC.

Ответ: ____________________



2. Треугольники ABC и DBF имеют общую вершину B, а их основания AC и DF лежат на одной прямой. Найдите отношение площадей треугольников ABC и DBF, если $DF = 7$ см, $AC = 21$ см.

Ответ: **1. 3 : 2; 2. 2 : 1; 3. 3 : 1; 4. 4 : 1.**



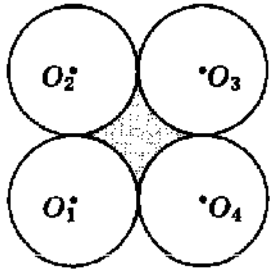
3. В трапеции $ABCD$ основание BC равно 1 см, боковая сторона AB наклонена к основанию AD под углом 45°. Точка F – основание высоты трапеции делит сторону AD на отрезки $AF = 6$ см и $FD = 17$ см. Найдите площадь трапеции.

Ответ: ____________________

4. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и их периметры относятся как 2 : 5. Площадь треугольника $A_1B_1C_1$ на 42 см^2 больше площади треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: ______________________

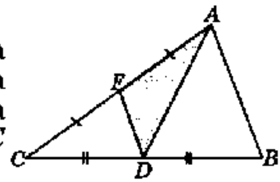
5. Четыре равные окружности попарно касаются внешним образом. Найдите площадь заштрихованной фигуры, если радиус каждой из окружностей равен 4 см.



6. В треугольник вписана окружность радиуса 4 см. Одна из сторон треугольника разделена точкой касания на отрезки 6 см и 8 см. Найдите длины сторон треугольника.

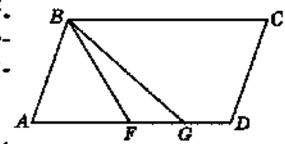
2-й вариант

1. В треугольнике ABC проведена медиана AD, а в треугольнике ADC – медиана DF. Найдите площадь треугольника ADF, если площадь треугольника ABC равна 24 см^2.



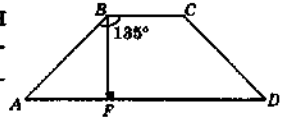
Ответ: ______________________

2. В параллелограмме $ABCD$ на стороне AD, равной 16 см, отмечены точки F и G. Найдите отношение площади параллелограмма $ABCD$ к площади треугольника GBF, если отрезок FG равен 4 см.



Ответ: 1. 4 : 1; 2. 8 : 1; 3. 5 : 1; 4. 16 : 1.

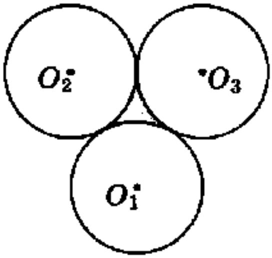
3. В равнобедренной трапеции основания равны 7 см и 17 см. Тупой угол трапеции равен 135°. Найдите площадь трапеции.



Ответ: ______________________

4. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны и отношение сходственных сторон равно 5 : 3. Площадь треугольника ABC на 16 см^2 больше площади треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите площадь треугольника ABC.

Ответ: ______________________



5. Три равные окружности попарно касаются внешним образом. Найдите площадь заштрихованной фигуры, если радиус каждой из окружностей равен 4 см.

6. Треугольник ABC, стороны которого 13 см, 14 см и 15 см, разбит на три треугольника отрезками, соединяющими точку пересечения медиан M с вершинами треугольника. Найдите площадь треугольника BMC.

ТЕМАТИЧЕСКОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

№ §	Тема	Число часов

§ 11. Подобие фигур

100. 101. 102.	Преобразование подобия Свойства преобразования подобия Подобие фигур	2
103.	Признак подобия треугольников по двум углам	2
104.	Признак подобия треугольников по двум сторонам и углу между ними	1
105.	Признак подобия треугольников по трем сторонам	1
106.	Подобие прямоугольных треугольников	2
107.	Углы, вписанные в окружность	1
108.	Пропорциональность отрезков хорд и секущих окружности	1
109.	Измерение углов, связанных с окружностью	1
	Систематизация и обобщение знаний	1
	Контрольная работа	1
	Резерв	3

§ 12. Решение треугольников

110.	Теорема косинусов	1
111.	Теорема синусов	1
112.	Соотношение между углами треугольника и противолежащими сторонами	2
113.	Решение треугольников	3
	Систематизация и обобщение знаний	1
	Контрольная работа	1
	Резерв	2

№ §	Тема	Число часов

§ 13. Многоугольники

114.	Ломаная	1
115.	Выпуклые многоугольники	1
116.	Правильные многоугольники	3
117.	Формулы для радиусов вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников	
119.	Вписанные и описанные четырехугольники	1
120.	Подобие правильных выпуклых многоугольников	2
121.	Длина окружности	
122.	Радианная мера угла	
	Систематизация и обобщение знаний	1
	Контрольная работа	1
	Резерв	2

§ 14. Площади фигур

123.	Понятие площади	2
124.	Площадь прямоугольника	
125.	Площадь параллелограмма	3
126.	Площадь треугольника	
127.	Равновеликие фигуры	1
128.	Площадь трапеции	1
129.	Формулы для радиусов вписанной и описанной окружностей треугольника	1
130.	Площади подобных фигур	1
131.	Площадь круга	2
	Систематизация и обобщение знаний	1
	Контрольная работа	1
	Резерв	2

№ §	Тема	Число часов
	Заключительное повторение	
	Систематизация и обобщение знаний по курсу планиметрии	15
	Контрольная работа	1
	Подведение итогов	1

Справочное издание

Мищенко Татьяна Михайловна

Дидактические материалы и методические рекомендации для учителя по геометрии

9 класс

к учебнику А. В. Погорелова
«Геометрия. 7–9 классы»

Издательство ***«ЭКЗАМЕН»***

Гигиенический сертификат
№ РОСС RU. AE51. Н 16582 от 08.04.2014 г.

Главный редактор *Л. Д. Лаппо*
Редактор *И. М. Бокова*
Технический редактор *Л. В. Павлова*
Корректоры *Т. И. Шитикова, Л. И. Иванова*
Дизайн обложки *А. А. Козлова*
Компьютерная верстка *К. А. Реутова*

107045, Москва, Луков пер., д. 8.
www.examen.biz
E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры,
литература учебная

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт», г. Тверь, www.pareto-print.ru

**По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).**